



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

ASIGNATURA / COURSE TITLE

Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales / [Advanced Course in Partial Differential Equations](#)

1.1. Código / Course number

32931

1.2. Materia / Content área

Partial Differential Equations, theory and applications

1.3. Tipo / Course type:

Formación optativa / [Optional topic](#)

1.4. Nivel / Course level:

Máster M2 / [Master M2](#)

1.5. Curso / Year:

2018/2019

1.6. Semestre / Semester

Segundo / [Second \(Spring semester\)](#)

1.7. Idioma / Language

Español e inglés. (El curso se podrá impartir en inglés siempre y cuando, al menos, un alumno internacional matriculado en la asignatura lo solicite). / [Spanish and English. \(The course can be taught in English if at least one officially registered international student requests so\).](#)

1.8. Requisitos previos / Prerequisites

Es importante que el alumno posea los conocimientos básicos de introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. En ese sentido, se recomienda encarecidamente haber cursado la asignatura de EDP del Primer Cuatrimestre del Máster.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

Asimismo, resultará de gran utilidad poseer conocimientos previos de Variable Real y de Análisis Funcional.

It is important that the student to have the basic knowledge of introduction to the Partial Differential Equations. In that sense, it is strongly recommended having followed the EDP's course of the first semester of the Master program. Likewise, it will be of great usefulness to possess previous knowledge of Real Analysis and Functional Analysis.

1.9. Requisitos mínimos de asistencia a las sesiones presenciales / **Minimum attendance requirement**

La asistencia es muy recomendada, las ausencias han de ser justificadas.

Attendance is highly recommended, occasional absence must be justified.

1.10. Datos del equipo docente / **Faculty data**

Profesor / **Professor Matteo Bonforte**
 Departamento de / **Department of Mathematics**
 Facultad de Ciencias / **Faculty of Sciences**
 Despacho - Módulo / **Office 405, módulo 17**
 Teléfono / **Phone: +34 91 497 6932**
 Correo electrónico/**Email: matteo.bonforte@uam.es**
 Página web/**Website: <https://www.uam.es/matteo.bonforte>**
 Horario de atención al alumnado/**Office hours: por cita previa / by appointment**

Objetivos del curso / **Course objectives**

El objetivo principal del curso consiste en ofrecer una panorámica actual de problemas modelados por ecuaciones de evolución, tanto lineales como no lineales, clásicas y presentes en líneas de investigación actuales. Se estudiará la contrapartida elíptica, relacionada con la parte de evolución. Los modelos que se estudiarán son básicos pero los resultados que se obtienen pueden considerarse como prototipos de comportamientos en situaciones más complicadas y generales. Dentro de esta generalidad se analizarán las similitudes y diferencias entre modelos locales y no locales para ofrecer al alumno una información cercana a diversas líneas de investigación que se han abierto recientemente.

The main goal of this course is to present an actual landscape of problems modeled by Linear and Nonlinear Evolution equations that appear in the classic and current lines of research. We will also study the elliptic counterpart connected to the evolutionary part. The course aims to present to the student the axiomatic that justify such equations as well as the techniques developed to solve them. The models



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

under study are the basic ones, but the results that are obtained can be considered as prototypes of behaviors in more complicated and general situations. In this general framework, we will analyze the similarities and differences between local and not local models, to offer to the student an information close to diverse lines of research that have been opened recently.

Contenidos del programa / Course contents

1. The “Dream Theory”. Teoría avanzada de la ecuación del calor clásica.

El problema de Cauchy para la ecuación del calor en todo el espacio.

- Diferentes conceptos de soluciones (débiles, fuertes, mild, clásicas). Existencia y unicidad para clases generales de datos iniciales: formula de representación.
- Teoría óptima de existencia y unicidad para datos “grandes” y teoría de trazas iniciales: una pincelada de la Teoría de Widder.
- Clases de ecuaciones más generales: introducción a los Nucleos del Calor.
- Regularidad de soluciones. Desigualdades de Harnack, regularidad Hölderiana y superior. El método de Nash-Moser parabólico.
- Super-Iper-Ultra contractividad y conexión con desigualdades funcionales.
- Propiedades asintóticas finas de las soluciones. Métodos de Entropía.
 - Ecuaciones rescaladas: ecuaciones de Fokker-Plank y Ohrstein-Uhlenbeck y sus propiedades espectrales.
 - Tasas de estabilización óptima y constantes óptimas en las desigualdades de Sobolev Logaritmicas y de Poincaré con pesos.

El problema de Cauchy-Dirichlet Problem para la EC en dominios Euclideos acotados.

- Diferentes conceptos de soluciones (débiles, fuertes, mild, clásicas). Existencia y unicidad para clases generales de datos iniciales.
- Regularidad de las soluciones via Nucleos del calor.
- Unos resultados asintóticos. Ultracontractividad intrínseca, tasas de estabilización óptima y constantes óptimas en las desigualdades de Poincaré con pesos.

2. Introducción a la teoría de existencia y unicidad para ecuaciones de evolución.

Cuanto de la “Dream Theory” para la EC se puede aplicar para ecuaciones parabólicas más generales?

- Ecuaciones de evolución lineales abstractas. El teorema de Hille-Yoshida (espacios de Hilbert). Soluciones Mild.
- Ecuaciones de evolución no lineales en espacios de Hilbert. Semigrupos de operadores Maximales Monotonos en espacios de Hilbert. Soluciones mild VS fuertes.
- Ecuaciones de evolución no lineales en espacios de Banach. El teorema de Crandall-Liggett. Problemas elípticos y “Implicit time discretization scheme”



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

- Aplicación de la teoría de existencia y unicidad a problemas concretos. Aplicaremos la teoría a problemas de Cauchy y Dirichlet (Neumann a veces)
 - Ecuaciones parabólicas lineales con coeficientes.
 - Ecuaciones parabólicas cuasi-lineales (no-degeneradas ni singulares)
 - Ecuaciones parabólicas no lineales de tipo degenerado/singular:
 - Ecuación de los medios porosos (PME) y de la difusión rápida (FDE).
 - La ecuación p -Laplaciana de evolución (PLAP).
 - Ecuación de Schrödinger y de ondas.

3. Temas avanzados. Proponemos varios temas y algunos de ellos serán desarrollados dependiendo del interés de los estudiantes. Algunos temas serán tratados en mini-cursos avanzados. Algunos otros temas (no incluidos en el listado abajo) serán considerados y serán propuestos al comienzo del curso.

- La ecuación del calor fraccionaria (FHE) en todo el espacio.
 - Diferentes conceptos de soluciones (débiles, fuertes, mild, clásicas).
 - Existencia y unicidad para clases generales de datos iniciales: medida creciente y fórmula de representación.
 - Teoría óptima de existencia y unicidad para datos “grandes” y teoría de trazas iniciales: una pincelada de la Teoría de Widder.
 - Clases de ecuaciones más generales: introducción a los Núcleos del Calor.
 - Regularidad de soluciones.
 - Desigualdades de Harnack locales y globales.
 - Comportamiento asintótico
- La ecuación del calor fraccionaria (FHE) en dominios Euclídeos acotados: Dirichlet problem.
 - Diferentes tipos de Laplaciano fraccionario en dominios acotados con condiciones de contorno de Dirichlet.
 - El problema lineal y semilineal elíptico en dominios acotados.
 - El problema parabólico en dominios acotados.
- La ecuación de los medios porosos clásica y/o fraccionaria en dominios acotados.
 - Existencia, Unicidad, Smoothing Effects
 - Velocidad de propagación finita e infinita.
 - Desigualdades de Harnack locales y globales.
 - Regularidad: Hölderiana y superior.
 - Comportamiento asintótico óptimo.
- Teoría básica de los flujos de difusión en variedades Riemannianas Flujos geométricos.
 - Flujos en variedades de tipo medios porosos o p -Laplaciano (por ejemplo en la esfera o en el espacio hiperbólico)
 - Flujo de Yamabe y/u otros flujos geométricos.
 - Existencia, Unicidad, Smoothing Effects
 - Conservación VS pérdida de masa: el efecto de la curvatura. Extinción en tiempo finito vía desigualdades funcionales.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

- Velocidad de propagación: el efecto de la curvatura.
- Comportamiento asintótico.

1. The “Dream Theory”. The advanced theory of the classical Heat Equation.

The Cauchy Problem for the Heat Equation (HE) on the whole space.

- Various concepts of solutions (weak, strong, mild, classical). Existence and uniqueness for general classes of initial data: representation formula.
- Optimal theory of existence and uniqueness for large data and for initial traces: a glance at Widder Theory.
- More general classes of equations: introduction to Heat Kernels.
- Regularity of solutions. Harnack inequalities, Hölder and higher regularity. The parabolic Nash-Moser method
- Super-hyper-ultra-contractivity estimates and connection with functional inequalities: a first asymptotic result.
- Finer asymptotic properties of the solutions. The Entropy method.
 - Rescaled equations: Fokker-Plank and Ohrstein-Uhlenbeck equations and their spectral properties.
 - Sharp stabilization rates and optimal constants in functional inequalities of Log-Sobolev and Poincaré type.

The Cauchy-Dirichlet Problem for the HE on bounded Euclidean domains.

- Various concepts of solutions (weak, strong, mild, classical). Existence and uniqueness for general classes of initial data.
- Regularity of solutions via Heat Kernels
- Some asymptotic results. Intrinsic Ultracontractivity, stabilization rates and sharp constants in weighted Poincaré inequalities.

2. Introduction to existence and uniqueness theory for evolution equations.

How much of the “Dream Theory” for HE apply to more general parabolic equations?

- Abstract linear evolution equations. The Hille-Yoshida Theorem (Hilbert spaces). Mild solutions.
- Nonlinear evolution equations in Hilbert Spaces. Semigroups of Maximal Monotone Operators in Hilbert Spaces. Mild VS strong solutions.
- Nonlinear evolution equations in Banach Spaces. The Crandall-Liggett Theorem. Elliptic problems and “Implicit Time Discretization Scheme”
- Application of existence and uniqueness theory to concrete problems. We will apply the above theory to Cauchy and Dirichlet problems. (Neumann sometimes)
 - Linear parabolic equations with coefficients.
 - Quasilinear parabolic equations (non degenerate nor singular)
 - Nonlinear parabolic equations of degenerate/singular type:
 - The Porous Medium (PME) and Fast diffusion equations (FDE).
 - The p-Laplacian evolution equation (PLAP).
 - Schrödinger and Wave equation.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

3. Advanced topics. We propose several topics, few of them will be considered, depending on the interest of the students. Some of them can be the subject of advanced mini-courses. Also other extra topics (not included in the list below) can be considered and will be proposed at the beginning of the course.

- The Fractional Heat equation (FHE) on the whole space.
 - Various concepts of solutions (weak, strong, mild, classical).
 - Existence and uniqueness for general classes of initial data: growing measure data and representation formula.
 - Optimal theory of existence and uniqueness for large measure data and for initial traces: a glance at Widder Theory.
 - Regularity of solutions.
 - Local and global Harnack inequalities.
 - Asymptotic behavior
- The Fractional Heat equation (FHE) on bounded domains: Dirichlet problem.
 - Different kinds of Fractional Laplacian on bounded domains with Dirichlet boundary conditions.
 - The linear and semilinear Elliptic problem on bounded domains.
 - The parabolic problem on bounded domains.
- The classical and/or fractional Porous Medium Equation on bounded domains.
 - Existence, Uniqueness, Smoothing Effects
 - Finite and infinite speed of propagation
 - Global and local Harnack inequalities.
 - Regularity: Hölder and higher regularity
 - Sharp asymptotic behavior.
- Basic theory of diffusion flows on Riemannian manifolds. Geometric flows.
 - Porous media, p -Laplacian flows on manifolds (for instance on the sphere or on the hyperbolic space)
 - Yamabe flow and/or other geometric flows.
 - Existence, uniqueness and smoothing effects.
 - Conservation VS loss of mass: the effect of curvature, extinction in finite time via functional inequalities.
 - Speed of propagation: the effect of curvature.
 - Asymptotic behavior

a. Referencias de consulta / Course bibliography

Libros/Books

Brezis, H.: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
Código: 32931
Centro: Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
Nivel: Máster M2
Tipo: Optativa
Nº de créditos: 6

Brezis, Haim Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, (2011). xiv+599 pp. ISBN: 978-0-387-70913-0

E. B. Davies. Heat kernels and spectral theory, Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. x+197 pp.

Evans, L. C.: Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

Evans, L. C., Gariepy, R. F.: "Measure theory and fine properties of functions". Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

E. Giusti, "Direct methods in the calculus of variations", World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003. viii+403 pp. ISBN: 981-238-043-4.

A. Grigor'yan, "Heat Kernel and Analysis on Manifolds", AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 47, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009

L. Saloff Coste, Aspects of Sobolev-type inequalities. London Mathematical Society Lecture Note Series, 289. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. x+190 pp. ISBN: 0-521-00607-4

J. L. Vazquez. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory", vol. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2007.

Artículos/ [Articles](#).

Se complementaran las referencias con una lista de artículos.
[The references will be complemented by a list of papers.](#)

2. Métodos docentes / [Teaching methodology](#)

El material básico se cubrirá en clases convencionales. Parte de los temas avanzados serán asignados a los estudiantes para estudio individual. Se espera que los estudiantes presenten estos temas en el aula. Se propondrán ejercicios. Se harán mini-cursos avanzados (6-8 horas) en el horario de clase, dados por expertos en el área. Mas detalles al comienzo del curso.

[The basic material will be covered in standard lectures. Part of the more advanced topics will be assigned to the students for individual study. The students are expected to present these topics in the classroom. Exercises will be proposed. There will be advanced mini-courses \(6-8 hours\) during the classes, given by experts in the field.](#)



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

3. Tiempo de trabajo del estudiante / **Student workload**

		Nº de horas	
Presencial	Clases teóricas	42 h (28%)	54 h (36%)
	Tutorías programadas a lo largo del semestre	4 h (2,7%)	
	Seminarios y trabajos	6 h (4%)	
	Examen final	2 h (1,3%)	
No presencial	Elaboración de problemas	39 h (26%)	96h (64%)
	Estudio semanal	51 h (34%)	
	Preparación del examen (presentación)	6 h (4%)	
Carga total de horas de trabajo: 25 horas x 6 ECTS		150 h	

4. Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / **Evaluation procedures and weight of components in the final grade**

EVALUACIÓN ORDINARIA

La nota final será la media ponderada entre la evaluación continua (problemas y exposiciones; peso 30%) y el examen oral final (peso 70%) que versará sobre un tema previamente asignado (una exposición después del fin del curso). Más detalles serán dados al comienzo del curso.

EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

Examen final 100%

ORDINARY EVALUATION

The final grade will be obtained as the average of the continuous assessment (problems and expositions; weight 30%) and the final oral exam (70%) on a subject previously assigned (a talk after the end of the course). More details will be given at the beginning of the course.

EXTRAORDINARY EVALUATION

Final exam 100%



Asignatura: Curso avanzado de Ecuaciones Derivadas Parciales
 Código: 32931
 Centro: Ciencias
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones
 Nivel: Máster M2
 Tipo: Optativa
 Nº de créditos: 6

5. Cronograma* / Course calendar

6.

Semana Week	Contenido Contents	Horas presenciales Contact hours	Horas no presenciales Independent study time
1-5	Parte 1 / Part 1	14	30
6-10	Parte 2 / Part 2	14	30
11-14	Parte 3 / Part 3	14	30
14-16	evaluaciones	14	16

*Este cronograma tiene carácter orientativo / [Tentative](#)