Cuadernos de Economía. Vol. 28, 073-084, 2005

Revisión de la paradoja de la seguridad social: variación en la esperanza de vida y en la edad de jubilación

Joan Hortalà, Xavier Melo y M.ª J. Carro

ABSTRACT

A partir de la paradoja de H. Aaron[1] originaria en el artículo germinal del profesor Samuelson[2], desarrollamos un nuevo modelo incorporando las variables esperanza de vida y edad de jubilación de la población. Posteriormente, realizamos una simulación matemática de las riquezas de los sistemas públicos y privados de pensiones y de las rentabilidades de ambos sistemas precisando los valores de las diferentes variables.

1. INTRODUCCIÓN

La paradoja de H. Aaron que tiene su origen en el artículo germinal del profesor Samuelson, considera que si un sistema de reparto se financia con un impuesto fijo

[1] Aaron, H. J.,The Social Insurance Paradox, Canadian Journal of Economics and Political Science, vol. 32, núm. 3, págs. 371-374, 1966.

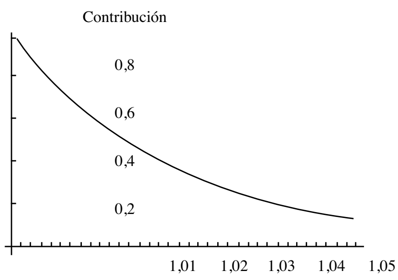
[2] Samuelson P. A., An Exact Consumption Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, MIT, vol. LXVI, núm. 6, 1958.

sobre el salario, se obtiene una rentabilidad aproximadamente igual a la suma del incremento del salario y de la población activa. Si el rendimiento es superior al interés real, entonces el sistema de reparto es más rentable que el sistema de capitalización aumentando el bienestar de la sociedad aunque la renta permanezca inalterada. Esto es válido si el ahorro y por consiguiente la inversión, es decir el crecimiento de la renta no se reduce conforme aumenta la Seguridad Social. Para el cálculo de las poblaciones, el autor encuentra que P_k ,la población en el año *k,* está en función de J_k, los individuos que se jubilan en el año *k*, mediante la fórmula

$$P_k = J_k \left\{ \left(\frac{1}{t^{n=m-1}} + \ldots + 1 \right) + \left(t + \ldots + t^m \right) \right\},$$

donde *m* es los años cotizados para acceder a la jubilación, *(n-m)* los años que vive como pensionista y definimos la tasa de crecimiento de la población como $t = 1+ g$. El primer factor de la expresión anterior corresponde a la población pasiva y el segundo a la población activa. De ahí deducimos la relación jubilados-activos y obtenemos las contribuciones. Representamos en la Gráfica 1 las contribuciones del modelo de Aaron en función de la tasa de crecimiento, en una población que trabaja 30 años y vive como pensionista otros 30.

Gráfico 1. Contribución H. Aaron



Observamos que la contribución de Aaron converge a 1 si la tasa de crecimiento tiende a 1.

Siguiendo la nomenclatura original del autor, definimos $s = 1+ h$ la tasa de crecimiento del salario, r $= 1+ i$ la tasa de interés, y w_0 como el salario en el año *0*. Por lo tanto,

$$PV_T = \int w_0\, s^k \left(s^{-\infty}\, r^{\infty} + s^{-\infty+1}\, r^{\infty-1} + \ldots + s^{-1}\, r\right),$$

es la riqueza del sistema privado de un trabajador que se jubila en el año k, y

$$PV_B = w_0\, s^k \left(1 + s\, r^{-1} + s^2\, r^{-2} + \ldots + s^{n-m-1}\, r^{-n+m+1}\right),$$

es la riqueza del sistema público.

Complementariamente, denominamos N_k los nacidos en el año k, F_k los fallecidos en el año k y $\Delta_k = N_k - F_k$, el incremento de la población en el año k. En el modelo de Aaron la función PV_T/PV_B de cada individuo no depende del año en el que se jubila puesto que la edad de jubilación y esperanza de vida se mantienen constantes.

La dinámica demográfica en los países industrializados, la evolución del gasto social frente a las principales variables macroeconómicas[3] favorece un debate social sobre la necesidad de privatización[4] del sistema, así como propuestas para aliviar los efectos perversos[5] sobre el sistema público de reparto. En cualquier caso, la eficiencia de los sistemas público y privado propicia nuevos e interesantes planteamientos. Todos ellos con el único objetivo de mejorar el bienestar para el mayor número posible de individuos, y optimizar el gasto social de la sociedad[6].

[3] Un ejemplo particular y reciente lo encontramos en Atanasio, Orazio, Social Security and houseshlods Saving, Quarterly Journal of economics, 2003

[4] Destacamos las siguientes lecturas recientes: Gale, William G., Privatizing social security, Journal of economic literature, 2.003; Aaron, Henry J. Should the united states privatising social security, 1.999; Shoulz, John Karl, Should the United States privatise social Security?, Journal of economics literature, 2.003.

[5] Un ejemplo del sobrecoste de las prejubilaciones lo encontramos en Cremer, Helmult, The double dividend of postponing retirement, International tax and public finance, 2003.

[6] Un análisis reciente sobre los efectos del gasto en educación y pensiones lo encontramos en Glom, Gerhard, Distributional effects of public education in a economiy wit public pensions, International economic review, 2003.

2. Modelo con variación en la esperanza de vida y en la edad de jubilación

En esta sección presentamos un nuevo modelo matemático respetando en todo momento la nomenclatura y los cálculos iniciales del profesor H. Aaron. Nuestro modelo incorpora dos nuevas e interesantes hipótesis de trabajo: las variaciones en la esperanza de vida y en la edad de jubilación de la población.

Los cálculos siguientes implican que la sociedad no tiene miopía social cuando percibe la riqueza de los sistemas de pensiones. Los individuos de cada población conocen el valor actual actuarial de los sistemas de pensiones en cada momento y el coste de las variaciones demográficas que incluye el modelo. Por ello, los individuos en nuestro modelo toman las decisiones racionalmente previendo el cambio de prestaciones debido a las variaciones en la esperanza de vida y edad de jubilación.

El modelo matemático, analiza la relación entre el sistema privado de capitalización y el sistema público de reparto, incorporando diferentes contribuciones de la población dependiendo de las variaciones en la esperanza de vida y en la edad de jubilación.

Iniciamos el análisis definiendo el momento del cambio en el *año 0*, *m'* los años que cotizan los nacidos a partir del año *0, n-m* los años que vive como pensionista los nacidos antes del año *0 y n'-m'* los que vive como pensionistas los nacidos a partir del año *0*.

Teniendo en cuenta lo anterior y a fin de poder realizar el cálculo de todas las poblaciones necesarias, incluimos y demostramos el siguiente teorema.

Teorema.

(i) Si $j \leq n - 1$, $\quad N_j = N_0\, t^j$.

(ii) Si $n \leq j \leq n' - 1$, $\quad N_j = N_0\, t^{j-n}\, (t^n - 1)$.

(iii) Si $j \geq n'$, $\quad N_j = N_0\, t^j \left(1 - t^{-n} + t^{-n}\right)$.

Demostración.

(i) Puesto que la tasa de crecimiento de la población es constante, se cumple que para todo, $j \in \mathrm{N}$, $P_{j+1} = P_j\, t$ y por tanto, como

$$P_j + \Delta_{j+1} = P_{j+1} = P_j t = (P_{j-1} + \Delta_j)\, t \ ,$$

deducimos que,

$$\Delta_{j+1} = N_{j+1} - F_{j+1} = \Delta_j t = (N_j - F_j)\, t \;,$$

de donde concluimos necesariamente, $N_j = N_0\, t^j$.

(ii) Puesto que entre los años n y n' no hay fallecimientos debido al aumento en la esperanza de vida de la población, tenemos que, $F_j = 0$ *para todo* $n \leq j < n' - 1$. En particular si, $j = n$,

$$N_n = (\, N_{n-1} - F_{n-1}\,)\, t$$

Como $F_{n-1}\, t$ son los individuos que nacen en el año 0, N_0 , deducimos este segunda apartado aplicando la fórmula anterior al apartado (i) y teniendo en cuenta que *si* $n \leq j < n' - 1$, $N_j = N_n\, t^{\,j-n}$

(iii) Análogamente:

$$(N_{n'} - F_{n'}) = N_{n'-1}\, t$$

y puesto que $F_{n'} = N_0$, obtenemos aplicando el apartado (i) que $N_{n'} = N_0\, [t^{\,n'} - t^{\,n'-n} + 1]$. Finalmente, usando que si $j \geq n'$, $N_j = N_{n'} t^{\,j-n'}$, deducimos el resultado.

Como consecuencia del teorema se encuentra las diferentes poblaciones:

[1] Si $j < n$,

$$Pj = N_0 t^{j-1}\, \frac{1 - t^{-n}}{t - 1}$$

[2] Si $n \leq j < n'$,

$$Pj = N_0 t^{j+1-k}\, \frac{t^k - 1}{t - 1}$$

[3] Si $n' \leq j < n' + n - 1$,

$$Pj = N_0 t^{j+1}\, \frac{1 - t^{-n}}{t - 1}$$

[4] Si $n' + n - 1 \leq j < 2n' - 1$,

$$P_j = N_0 \frac{[-1 - t^{j+1}(1 - t^{-n} + t^{n'-n})]}{t - 1}$$

[5] Si $j \geq 2n' - 1$,

$$P_j = N_0\, t^{j+1} \frac{(1 - t^{-n} + t^{-n'})}{t - 1}(1 - t^{-n'})$$

Con el fin de profundizar en el análisis final de contribuciones y riqueza de los sistemas de pensiones precisamos encontrar las poblaciones de jubilados que definimos como T_j:

[1] $j < n$,

$$T_j = N_0\, t^{\,j-m+1}$$

[2] $n \leq j < n'$.

$$T_j = N_0 \frac{t^{j-m'+1} - 1}{t - 1}$$

[3] En el caso $n' \leq j < n' + n - 1$, encontramos tres poblaciones de pasivos diferentes.

[3.1] Si $n' \leq j < m' + n$,

$$T_j = N_0 \frac{(t^{-m'} + t^{-n'})\, t^{j+1}}{t - 1}$$

[3.2] Caso $m' + n \leq j < m' + n'$,

$$T_j = \frac{N_0}{t - 1}[1 + t^{j+1}(t^{-m'} - t^{n-m'} - t^{-n'})]$$

[3.3] Si $m' + n' \leq n + n' - 1$

$$T_j = \frac{N_0}{t-1}\left[t^{j+1}\left(t^{-m'} - t^{-n-m'} + t^{-n'-m'} - t^{-n'}\right)\right]$$

[4] Si $n' + n - 1 \leq j \leq 2\,(n' - 1)$,

$$T_j = N_0\,\frac{\left[-1 + t^{j+1}\left(t^{-m'} - t^{-n-m'} + t^{-n'-m'} - t^{-n'} + t^{-n-n'}\right)\right]}{t-1}$$

[5] Caso $j \geq 2n' - 1$,

$$T_j = N_0\,\frac{\left(1 - t^{-n'} + t^{-n'}\right) t^{j+1}\left(t^{-m'} - t^{-n'}\right)}{t-1}$$

Una vez conocidas las poblaciones, estudiamos las contribuciones al sistema. Definimos λ_j como la contribución al sistema de reparto en el año j. Calculamos la aportación como el cociente entre población pasiva y población total.

Analíticamente,

$$\lambda_j = \frac{T_j}{P_j}$$

Si tomamos esta relación y no la definición de Aaron es porque llegaríamos a la paradoja que cuando el crecimiento de la población se acerca a 1, los trabajadores deberían trasladar todo su salario a los jubilados situación verdaderamente paradójica.

Por lo tanto, si consideramos que todas las pensiones se pagan con una parte *a* de las contribuciones, obtenemos *afw* aportaciones de los activos y se cumple de la siguiente ley de igualdad:

$$1 - \alpha f = \alpha \rightarrow \alpha = \frac{1}{1+f}$$

Por tanto como f = $\dfrac{T_j}{A_j}$

$$\alpha f = \frac{1}{1+\dfrac{T_j}{A_j}}\,\frac{T_j}{A_j} = \frac{T_j}{A_j + T_j} = \frac{T_j}{P_j}$$

Consecutivamente desarrollamos las contribuciones en cada período, y obtenemos que si $j \leq m,\ \lambda_j = \dfrac{(t^{n-m}-1)}{(t^n-1)}$ y si $j > 2\,n' - 1$, $\lambda_j = \dfrac{(t^{n'-m'}-1)}{(t^{n'}-1)}$ y si coherentes, ambas expresiones, con las calculadas por Aaron. Sin embargo, en el período,$m \leq j < 2n' - 1$, las contribuciones dependen de j por lo que definimos,

$$\beta_2 = \frac{1}{2n' - 1 - m}\sum_{j=m}^{2n'-2}\lambda_j$$

y obtenemos, mediante simples cálculos que,

$$\beta_2 = \frac{1}{2n'-1-m}\,\frac{1}{t^n-1}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{t^{n-m'} - t^{n-m} - t^{-m'} + 1}{1-t} + t^{n-m'}(2n'-m'-1) \\ + t^{n-n'}(1-n') \\ + t^{-m'}(n + m' + 1 - 2n') + t^{n-n'-m'}(n'-m'-1) \\ + t^n(2n' - 2n) + m + n - 2n' \end{array}\right\}$$

siendo β_2 la contribución aplicable en el período, $j \in [2m - 2n' + 2{,}4n'-m-2]$.

La aproximación anterior es consecuencia de ajustar el factor,

$$\sum_{j=n'+n-1}^{2n'-2}\lambda_j \approx \sum_{j=n'+n-1}^{2n'-2}\left[1 + \frac{t^{-m'} - t^{-n-m'} + t^{-n'-m'} - t^{-n'} - 1}{1-t^{-n}}\right]$$

a fin de poder desarrollar el cálculo con más facilidad. El lector puede fácilmente comprobar que el error cometido es despreciable.

3. Modelo de contribución por períodos

En nuestro modelo de contribución por períodos, la población prevé con total exactitud los cambios demográficos con antelación a cada uno de los períodos. En consecuencia, cada generación decide acomodar periódicamente sus aportaciones al sistema. Este estudio nos permite verificar y cuantificar con total exactitud desde el punto de vista de la teoría matemática como repercuten las diferentes aportaciones, las prestaciones resultantes y en definitiva las comparaciones período a período entre los sistemas de capitalización y de reparto. Con este propósito desarrollamos y homogeneizamos temporalmente un modelo de tres contribuciones con las siguientes etapas.

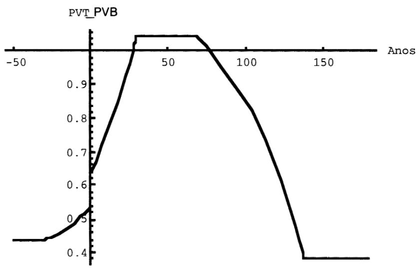
Para el período $j \leq m - 1$ los activos aportan $\beta_1 = \dfrac{t^{n-m} - 1}{t^n - 1}$ de su salario y los pasivos reciben unas prestaciones de, $(1 - \beta_1)w_j$, siendo w_j el salario. Igualmente si $m \leq j\ 2n' -2$ los activos contribuyen con β_2 del salario y los pasivos reciben $(1 - \beta_2)w_j$ y si $j \geq 2n'-2$ la contribución es $\beta_3 = \dfrac{t^{n'-m'} -1}{t^{n'} -1}$ y la prestación a los jubilados de $(1 - \beta_3)\ w_j$. Una vez calculadas las contribuciones procedemos a comparar la riqueza de ambos sistemas de pensiones, resumidos en la gráfica 2 y 3. A nivel de ejemplo, facilitamos la siguiente comprobación.

Si j es el año de nacimiento, los activos contribuyen con $\beta_1\ w_j$ y los pasivos reciben unas prestaciones $(1\text{-}\beta_1\ )\ w_j$. En el caso, $j \leq m - n$, el desarrollo reproduce fehacientemente el modelo de Aaron.

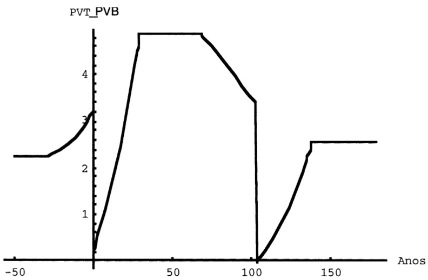
$$\frac{PV_T}{PV_B} = \frac{\beta_1\ w_0 r^{j+m}}{(1-\beta_1) w_0 r^{j+m}} \frac{\dfrac{\left(\frac{s}{r}\right)^j \left[\left(\frac{s}{r}\right)^m -1\right]}{\left(\frac{s}{r}\right) - 1}}{\dfrac{\left(\frac{s}{r}\right)^j \left[\left(\frac{s}{r}\right)^n - \left(\frac{s}{r}\right)^m\right]}{\left(\frac{s}{r}\right) - 1}} = \frac{\beta_1}{(1-\beta_1)} \frac{\left(\frac{s}{r}\right)^m - 1}{\left(\frac{s}{r}\right)^n - \left(\frac{s}{r}\right)^m}$$

Estas gráficas representan la síntesis de la riqueza comparativa de ambos sistemas de pensiones en el modelo de una contribución por períodos.

Gráfica 2. PV_T / PV_B , t = 5%



Gráfica 3. PV_T / PV_B , t= 0,1%



Las gráficas son evidentes. Cuando la tasa de crecimiento de la población desciende drásticamente aumente la ventaja del sistema de capitalización frente el sistema de reparto en un orden relacionado.

Refiriendo a la proposición clásica de Samuelson (1.958) donde establece que el sistema de pensiones de reparto se mantendrá en equilibrio financiero si su TIR media es menor o igual que la tasa de crecimiento de la suma de la tasa de crecimiento del número de cotizantes, el empleo y la tasa de crecimiento del salario medio, es decir la tasa fiscal del sistema, que en el largo plazo es el PIB. Relajando algunos de los supuestos simplificadores llegamos que, la tasa de crecimiento del PIB ha de superar la TIR media del sistema.

Como se ha comprobado nuestra tesis huye de la proliferación de pronósticos, con un cuadro macroeconómico y ciertas previsiones del sistema demográfico, donde se obtiene un resultado que presenta proyecciones de ingresos y gastos del sistema en un período concreto. Nuestra investigación en el análisis matemático obtiene conclusiones sobre la eficiencia y el equilibrio financiero para cualquier población de una sociedad, incorporando las variables esperanza de vida y edad de jubilación.

Definimos, $u = \frac{s}{r}$ como la relación tasa de salario-tasa de interés, y calculamos la rentabilidad, encontrando la u que iguala el sistema para diferentes crecimientos de población tomando $s = 2.8\%$ como valor sostenido. Una vez obtenida la u igualamos la siguiente ecuación:

$$u = \frac{s}{r} = \frac{s}{1+i}$$

y obtenemos los diferentes tipos de interés que igualan al sistema para los crecimientos de población que cumplen la primera condición.

Según el modelo matemático desarrollado, el crecimiento salarial determinado, otorga las rentabilidades especificadas en el siguiente cuadro para los diferentes crecimientos de población.

Cuadro 1

Crecimiento de la población	Rentabilidades de las poblaciones
0.1	1,8
0.6	2,2
1.1	2,6
1.6	3,1
2.1	3,5
2.6	3,9
3.1	4,3

Para atenuar la vulnerabilidad del sistema de reparto, es preciso una cierta correlación con un sistema privado de pensiones, un crecimiento demográfico sostenible y unas pensiones armonizadas vía productividad y vida laboral. De esta manera obtendremos un sistema de pensiones consistente con la economía real evitando ineficiencias altamente gravosas para el sistema en el medio plazo.

Además sería necesario un pacto social, para acordar actuaciones frente a reducciones en la tasa de crecimiento de la población. La implementación de algunos de los siguientes principios disminuiría la inmediata tensión sobre el sistema público de reparto y eliminaría riesgos de insolvencia en el futuro.

En primer lugar, podemos considerar la posibilidad de aumentar los años cotizados, en la medida que aumenta la esperanza de vida de la población y no incentivar efectos perversos con sistemas de prejubilaciones que reducen rápidamente la vida laboral.

En segundo lugar, otra medida atenuante al bajo crecimiento de la población, es el aumento de cupo en la inmigración. Las políticas de inmigración favorecen los beneficios especialmente en las fases tempranas de la vida cuando los inmigrantes adicionales mejoran el ratio de la dependencia de los mayores, y por lo tanto se reduce la carga del sistema de pensiones. Todo ello siempre con las restricciones propias de la integración social y otros factores limitativos como la vivienda o el acceso al mercado de trabajo. Aún así, la variable inmigración puede conllevar posiciones sociales adversas en democracia. Debemos tener en cuenta, como señalan algunos autores[7], que si los individuos votaran en una democracia como agentes económicos completamente racionales conociendo de antemano el valor actual de sus prestaciones y aportaciones, tendríamos una política inmigratoria variable[8], pero más liberal, que si los votantes actuaran de forma miope[9]. No debemos olvidar la posibilidad de aumentar las débiles tasas de crecimiento de la población con políticas eficaces para el aumento de la fertilidad en la población.

Es necesario, ponderar las consideraciones anteriores, desde un punto de vista económico si la población pertenece a un país desarrollado o en vías de desarrollo[10].

[7] Son de destacar los recientes estudios de Scholten, U. y Thum, M., *Public Pension and Inmigration Policy in a Democracy*, Public Choice, núm. 87, págs. 347-361, 1996.; Haupt, A. y Peters, W., *Public Pensions and Voting Inmigration*, Public Voice, núm. 95, págs. 403-413, 1997.

[8] Meijdam, L. y Harrie, V., *Aging and Political Decision Making on Public Pensions*, Departament of Economics (Tilburg University), 1995.

[9] Scholten, U. y Thum, M., *Public Pension and Inmigration Policy in a Democracy*, Public Choice, núm. 87, págs. 347-361, 1996.

[10] Wigger Berthould U. Pay-as-you-go financed public pensions in a model of endogenous growth and fertility;Departament of Economics of Mannheim, Germany; 1998.