¿Qué es la probabilidad?

Es la parte de las matemáticas que proporciona modelos para la incertidumbre

La incertidumbre se da en los resultados de los experimentos aleatorios

¿Qué es un experimento aleatorio?

Es una actividad en la que conocemos los posibles resultados pero no podemos predecirlos con exactitud

Ejemplos:

1. *Lanzar una dado tres veces*
2. *Medir la temperatura*
3. *Número de personas que van a venir a clase mañana*

Al conjunto de todos los resultados posibles lo llamamos $\hookrightarrow$ **ESPACIO MUESTRAL**

El objetivo de la PROBABILIDAD es medir la certidumbre (o incertidumbre) de que ocurran determinados ***sucesos***

¿Qué es un suceso?

Es un acontecimiento que puede o no ocurrir en un experimento aleatorio y que es combinación de posibles resultados

Ejemplos de sucesos:

1. *La suma de los tres dados es 9*
2. *La temperatura que medimos ahora es superior a la última medida*
3. *Mañana vienen entre 60 y 80 personas a clase*

Si llamamos $\boldsymbol{A}$ a un suceso cualquiera

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{P(A)}$$

es la probabilidad de que ocurra el suceso $\boldsymbol{A}$

Ejemplo: Tiramos una moneda "no trucada"

$P(cara) = 1/2 \qquad P(cruz) = 1/2 \qquad P(canto) = 0$.

<u>Propiedades de la probabilidad:</u>

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) Si A es un suceso que ocurre seguro, $P(A) = 1$

3) Si A es un suceso que no puede ocurrir, $P(A) = 0$

4) $P(\text{no } A) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5) Si A y B son dos sucesos que no tienen nada en común,

$$P(A \quad \text{ó} \quad B) = P(A) + P(B)$$

6) Si A y B son dos sucesos <u>INDEPENDIENTES</u> (la aparición de uno no afecta a la aparición del otro),

$$P(A \quad \text{y} \quad B) = P(A, B) = P(A)P(B)$$

¿Qué entendemos cuando decimos que $P(A) = p$?

Entre las diferentes interpretaciones que existen, la que da origen al concepto de probabilidad que se utiliza hoy en día es la

INTERPRETACIÓN FRECUENTISTA

$$\updownarrow$$

- Si el experimento se repite muchas veces, y
- Registramos cuantas veces sucede A

La frecuencia relativa

$$fr = \frac{\text{número de veces que ocurre } A}{\text{número de pruebas}}$$

se aproxima cada vez más a la medida de incertidumbre $P(A)$ cuando aumenta el número de pruebas

Espacios muestrales discretos

Son aquellos en los que el número de todos los posibles resultados es finito, o si es infinito, se puede numerar

$$\boldsymbol{\Omega = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}} \hookleftarrow \textit{Espacio muestral}$$

En este caso el MODELO DE PROBABILIDAD queda perfectamente especificado dando la probabilidad de cada resultado posible:

$$\boldsymbol{P(a_1), \ldots, P(a_n), \ldots}$$

1. $\boldsymbol{P(a_n) \geq 0}$ **para todo** $\boldsymbol{a_n}$
2. $\boldsymbol{\sum_n P(a_n) = 1}$
3. **La probabilidad de cualquier suceso** $\boldsymbol{A}$ **es la suma de las probabilidades de los resultados posibles que lo forman**
4. **Si el espacio muestral es finito, y el experimento EQUIPROBABLE:** $\boldsymbol{P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 1/n}$

$$P(A) = \underbrace{\frac{\textit{casos favorables}}{\textit{casos posibles}}}$$

$\hookrightarrow$ ***Regla de Laplace***

¿Nos interesan todos los detalles del experimento?

Generalmente, NO. Resumimos los resultados del experimento con variables aleatorias

¿Qué es una variable aleatoria?

Una VARIABLE ALEATORIA es una transformación de los resultados de un experimento aleatorio en valores numéricos

Ejemplo 1: *Lanzamos un dado tres veces y nos interesa la suma de los puntos*

$$\Omega = \{(1,1,1),(1,2,1),\ldots,(6,6,6)\}$$

La variable aleatoria asociada a este experimento es:

$$\boldsymbol{X} \equiv \textbf{Suma de los puntos de los tres lanzamientos}$$

$\boldsymbol{X}$ *toma valores en el conjunto* $\underbrace{\{3,4,\ldots,17,18\}}$ $\hookrightarrow$ $\boxed{\textbf{Soporte de } X}$

Ejemplo 2: *Medimos el nivel de ruido en tres puntos muy próximos y nos interesa la medición más alta*

$$\Omega = (0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$

La variable aleatoria asociada a este experimento es:

$$\boldsymbol{Y} \equiv \textbf{Nivel de ruido más alto entre los tres puntos}$$

$\boldsymbol{Y}$ *toma valores entre* $\underbrace{(0,+\infty)}$ $\hookrightarrow$ $\boxed{\textbf{Soporte de } Y}$

Tipos de variables aleatorias: $\longrightarrow$	- **Discretas** *(como X)* - **Continuas** *(como Y)* - **Mixtas**

¿Qué nos interesa de una variable aleatoria?

Nos interesa saber: 1.- Cómo se distribuyen las probabilidades entre todos los valores que puede tomar
2. Entorno a qué valor esperamos el resultado
3.- Cómo es la variabilidad

Distribución de una variable aleatoria

Se entiende por DISTRIBUCIÓN de X a la forma en que se asignan las probabilidades a los valores que toma X

La distribución se puede representar por:

1. **La función de distribución $F(x)$, que se define como**

$$F(x) = P(X \leq x)$$

2. **Para variables aleatorias discretas, por la función de masa o de probabilidad**

3. **Para variables aleatorias continuas, por la función de densidad**

Variables aleatorias discretas

La DISTRIBUCIÓN de la v.a. discreta X viene determinada por:

- **los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ que puede tomar, y**
- **las probabilidades con que aparecen, $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$**

$$\boxed{\begin{array}{l} p_i = P(X = x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \ldots \\ \hookrightarrow \text{Función de masa o de probabilidad} \end{array}}$$

Comentarios:

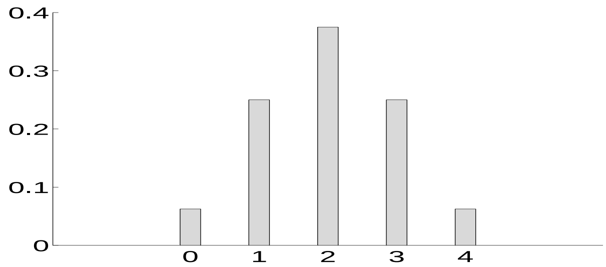
1. $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ **para todos los** i**, y** $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

2. Si conocemos la distribución de X**, podemos calcular la probabilidad de que tome valores entre** a **y** b

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a) + P(X = a + 1) + \cdots + P(X = b - 1) + P(X = b) \\ &= \sum_{x_i = a}^{b} P(X = x_i) \end{aligned}$$

3. Para visualizar la FUNCIÓN DE MASA se utiliza el diagrama de barras: - *En el eje horizontal los valores que toma* X
- *En el eje vertical las probabilidades de cada valor*

Ejemplo: $X \equiv$ *nº de caras en cuatro lanzamientos de una moneda equilibrada*



Variables aleatorias continua

La DISTRIBUCIÓN de la v.a. continua X no puede venir determinada por $P(X = x_i)$

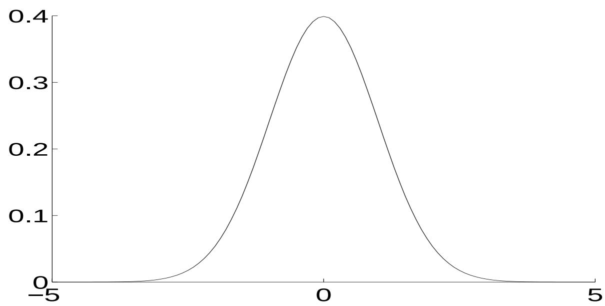
$$\boxed{\text{Si } X \text{ es una v.a. continua} \Longrightarrow P(X = x) = 0}$$

La DISTRIBUCIÓN de una v.a. continua viene determinada por la FUNCIÓN DE DENSIDAD $f(x)$:

- *En el eje horizontal los valores que toma X*

- *En el eje vertical la probabilidad de que la variable tome valores en un entorno "muy pequeño" de cada punto dividida por la longitud del intervalo*

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$



1. La función de densidad representa probabilidades por áreas

Si conocemos la distribución de X, podemos calcular la probabilidad de que tome valores entre a y b

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \text{área que } f(x) \text{ deja por debajo entre } a \text{ y } b \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

2. Siempre es no negativa

3. El área total que deja la curva por debajo es siempre 1

Vectores aleatorios

Si tenemos las variables aleatorias X e Y podemos construir el vector aleatorio: (X, Y)

Ejemplo:

$X \equiv$ *Altura de una persona*

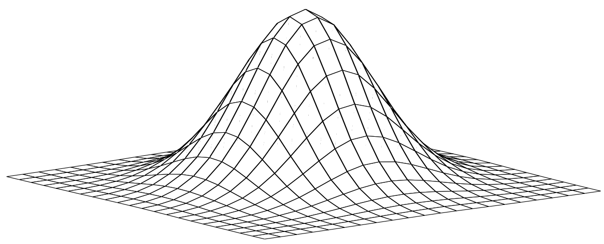
$Y \equiv$ *Peso de una persona*

1. **Cada variable sigue una DISTRIBUCIÓN de probabilidad MARGINAL que puede ser:** *Discreta* ó *Continua*

   $P(X = x)$, $P(Y = y)$ $\qquad$ $f(x)$, $f(y)$

2. **El vector aleatorio sigue una DISTRIBUCIÓN de probabilidad CONJUNTA que puede ser:** *Discreta* ó *Continua*

   $P(X = x, Y = y)$ $\qquad$ $f(x, y)$



El volumen debajo es = 1 $\hookrightarrow$

3. **Las v.a. discretas X e Y**

   son independientes $\Longleftrightarrow P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$

   para todo $x \in Sop(X)$ e $y \in Sop(Y)$

   Las v.a. continuas X e Y

   son independientes $\Longleftrightarrow f(x, y) = f(x)f(y)$

   para todo $x \in Sop(X)$ e $y \in Sop(Y)$

Valores característicos de una variable aleatoria

Medida de posición: ¿Entorno a qué valor esperamos los resultados del experimento?

1. *Para v.a. discretas hacemos un promedio de todos los posibles resultados, ponderando cada uno por su probabilidad de aparecer*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

2. *Para v.a. continuas hacemos lo mismo pero ponderando cada resultado posible por su densidad de probabilidad (e integrando)*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$\boxed{E(X) \text{ es la MEDIA o ESPERANZA de la v.a. } X}$

Propiedades:

1. *Si X es una v.a. y a un número cualquiera*

$$E(aX) = aE(X)$$

2. *Si X es una v.a., a y b dos números cualesquiera*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

3. *Si X e Y son dos v.a.*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

4. *Si X e Y son dos v.a., a y b dos números cualesquiera*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Medida de escala: ¿Cómo es la variabilidad?

1. *Para v.a. discretas hacemos un promedio de las discrepancias entre todos los posibles resultados y el valor central (MEDIA), ponderando cada una por la probabilidad de que se de el resultado*

$$\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E(X))^2 p_i}$$

2. *Para v.a. continuas hacemos lo mismo pero ponderando cada discrepancia por la densidad de probabilidad (e integrando)*

$$\boldsymbol{V(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))^2 f(x)dx}$$

$\boldsymbol{V(X)}$ **es la VARIANZA de la v.a.** $\boldsymbol{X}$

$\boldsymbol{\sqrt{V(X)}}$ **es la DESVIACIÓN TÍPICA de la v.a.** $\boldsymbol{X}$

Propiedades de la varianza:

1. $\boldsymbol{V(X) \geq 0}$

2. $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

3. *Si* $\boldsymbol{X}$ *es una v.a. y* $\boldsymbol{a}$ *un número cualquiera*

$$\boldsymbol{V(aX) = a^2 V(X)}$$

4. *Si* $\boldsymbol{X}$ *es una v.a.,* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *dos números cualesquiera*

$$\boldsymbol{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

5. *Si* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *son dos v.a.* **INDEPENDIENTES**

$$\boldsymbol{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$$

$$\nwarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } \boldsymbol{X} \textit{ e } \boldsymbol{Y} \textit{ no son independientes,} \\ \textit{NO ES CIERTO} \end{array} \right.$$

Valores característicos de un vector aleatorio

Medida de asociación: ¿Cómo es la relación?

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$$

$$\boxed{Cov(X,Y) \text{ es la COVARIANZA de la v.a. } X}$$

Propiedades:

1. *La $Cov(X,Y)$ es una medida de asociación lineal*
2. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. *Si X e Y son v.a. discretas,*

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} (x_i - E(X))(y_j - E(Y))P(X = x_i, Y = y_j)$$

4. *Si X e Y son v.a. continuas,*

$$Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))(y - E(Y))f(x,y)dxdy$$

5. *Si X e Y son v.a.* **INDEPENDIENTES** $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$
6. *Si $Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X$ e Y son v.a.* **INDEPENDIENTES**

DISTRIBUCIÓN NORMAL

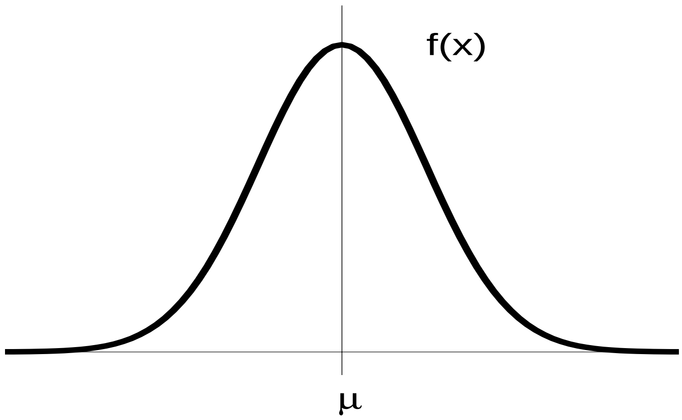
Def: Sea X la variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \; e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$

Entonces, se dice que X tiene distribución NORMAL

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$



CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LA DENSIDAD:

1. Depende de dos parámetros: μ y σ
2. Unimodal
3. Simétrica con respecto a μ

USOS PRINCIPALES:

1) Como modelo de probabilidad para muchos fenómenos

2) En particular, representa la distribución de probabilidad de muchos procesos de medición sin errores sistemáticos.

3) Aproxima otras distribuciones, entre ellas la BINOMIAL.

NORMAL ESTÁNDAR:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{z^2}{2}} \qquad z \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

Propiedades:

1) $\mathbf{E(Z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mathbf{0}$

2) $\mathbf{V(Z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mathbf{1}$

3) $\mathbf{F(z)} = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ESTA TABULADA

PROPIEDADES DE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

1) $$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$ ESTADARIZACIÓN DE LA NORMAL

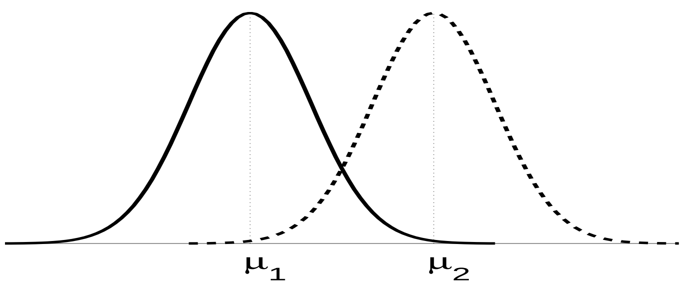
Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1) \implies X = \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

2) $\mathbf{E(X)} = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu = \boldsymbol{\mu}$

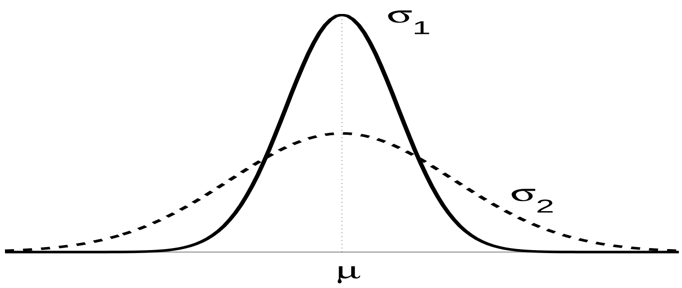
$\mathbf{V(X)} = V(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 V(Z) = \boldsymbol{\sigma^2}$

¿Cómo afectan μ y σ a la distribución?

- Cambios en la media μ:



- Cambios en la varianza σ^2: $\sigma_1 < \sigma_2$



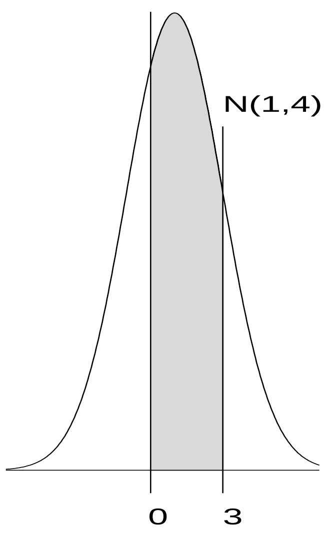
3) $$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= P(X \leq x) = P(\mu + \sigma Z \leq x) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

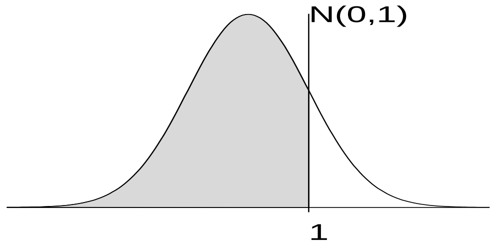
UTILIZAMOS LA TABLA DE LA $\mathcal{N}(0,1)$ PARA CALCULAR PROBABILIDADES ASOCIADAS A UNA $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

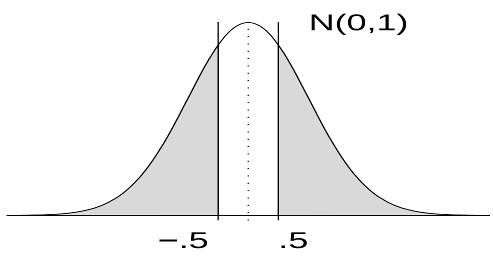
Ejemplo:

Sea $X \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2 = 4)$, ¿Cuál es la probabilidad de que X tome valores entre 0 y 3?

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 3) &= P\left(\frac{0-1}{2} \leq \frac{X-1}{2} \leq \frac{3-1}{2}\right) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5) \\ &= (1 - P(Z > 1)) - P(Z > 0.5) = 1 - 0.1587 - 0.3085 \\ &= 0.5328 \end{aligned}$$

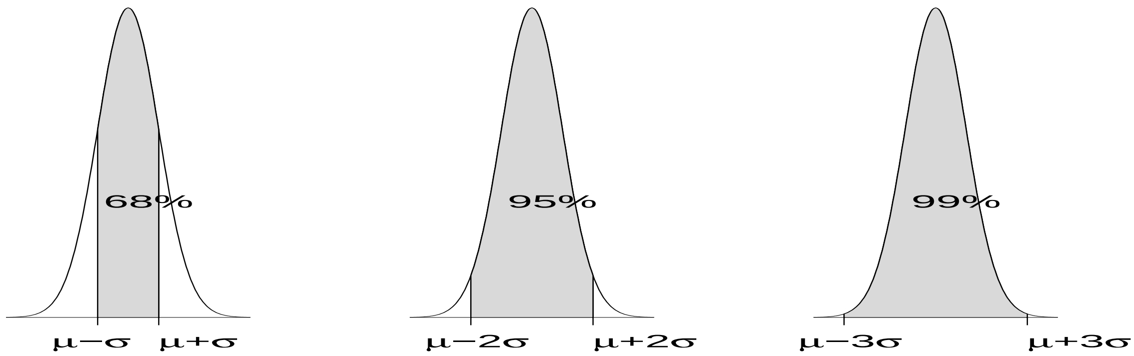






4) Para una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ cualquiera, podemos calcular las probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= P(X \text{ esté entre } \mu \pm \sigma) &\approx 0.68 \\
P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= P(X \text{ esté entre } \mu \pm 2\sigma) &\approx 0.95 \\
P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= P(X \text{ esté entre } \mu \pm 3\sigma) &\approx 0.99
\end{aligned}
$$



6) Por el TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE, si los resultados de un experimento se deben a:

1. un conjunto "grande" de causas $(X_1, \ldots, X_n)$,
2. independientes unas de otras,
3. que actúan sumando sus efectos,
4. siendo cada una de "poca" importancia,

entonces **la distribución de los resultados del experimento** es aproximadamente **NORMAL**.

<u>TCL:</u> Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ v.a. indep. con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$.
Sea $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces

$$\frac{Y - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\left(Y \sim \mathcal{AN}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)\right)$$

5) La BINOMIAL se puede aproximar por la NORMAL

Si $X \sim Bin(n,p)$, estamos en las condiciones del TCL

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{donde } X_1, \dots, X_n \text{ son } v.a.i.i.d. \text{ Bernoulli}(p)$$

Entonces,

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathcal{N}(0,1)$$

Lo que dice el teorema es que

$$\text{Si } X \sim Bin(n,p) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = P(Z \leq x)$$

APROXIMACIONES DE LA BINOMIAL		
n grande p pequeño np constante	$\Longrightarrow$	Se aproxima por una $\mathcal{P}(np)$
$np(1-p) > 5$	$\Longrightarrow$	Se aproxima por una $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

8) La POISSON también se puede aproximar por una NORMAL. La aproximación es buena cuando $\boldsymbol{\lambda > 5}$, entonces

$$\text{Si } Y \sim \mathcal{P}(\lambda) \Longrightarrow \frac{Y - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mathcal{N}(0,1)$$