Variable Compleja I

Lista 6 — 3º de Matemáticas/Informática

En los siguientes problemas denotaremos por $\mathbb{D}$ al disco unidad y por $\mathbb{H}$ al semiplano superior, es decir, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

1) Describir la imagen mediante $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R}$ **b)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ **c)** $\mathbb{D}$ **d)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$

2) Hallar una transformación de Möbius T tal que $T(i) = -i$, $T(0) = 0$, $T(-1) = \infty$.

3) Hallar una transformación de Möbius T tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ y $T(0) = 3 + 2i$.

4) Encontrar una aplicación holomorfa y biyectiva de Ω_1 en Ω_2 en los siguientes casos:

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\,,\ |z+1| < \sqrt{2}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{H}$.

b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\,,\ |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$.

c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

5) Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 con C_2 interior y tangente a C_1 (por ejemplo $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$) demostrar que se pueden colocar un número infinito de circunferencias C_n en la región comprendida entre C_2 y C_1 de tal manera que cada uno de ellas es tangente a C_1, C_2 y al siguiente.
Ayuda: Mediante una transformación de Möbius apropiada, transformar la región entre C_1 y C_2 en una región para la cual la solución sea sencilla.

6) Dar una transformación de Möbius T tal que $T(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z-1| > 1/2\})$ es de la forma $\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < h\}$ calculando exactamente h.

7) Sea f una función holomorfa en un dominio Ω simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y con valores en ese mismo dominio. Supongamos que en Ω hay dos puntos a, b, $a \neq b$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Probar que entonces f es la función identidad.

Ayuda: Pasar a $\mathbb{D}$.

8) Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa no constante. Probar que:

a) $\dfrac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}\ ,\ \ \forall z \in \mathbb{D}$

b) $|f'(w)| \leq \dfrac{1 - |f(w)|^2}{1 - |w|^2}\ ,\ \ \forall z \in \mathbb{D}$

Ayuda: Aplicar el Lema de Schwarz a $\phi_a \circ f$ (1er apartado) o a $\phi_b \circ f \circ \phi_a$ (2º apartado) con un $a \in \mathbb{D}$ apropiado en cada caso, donde $\phi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo conforme del disco definido por $\phi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Observar que $\phi_a \circ \phi_a$ es la identidad así que, por ejemplo, $f = \phi_a \circ (\phi_a \circ f)$.

9) Sea f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y además $f(0) = 1$. Usando una transformación de Möbius y el Lema de Schwarz, probar que:

a) $|f(z)| \leq \dfrac{1 + |z|}{1 - |z|}$ para cada $z \in \mathbb{D}$

b) $|f(z)| \geq \dfrac{1 - |z|}{1 + |z|}$ para cada $z \in \mathbb{D}$