Capítulo 6

Problemas de contorno: diferencias finitas

6.1. Introducción. Método de disparo

En ocasiones, las condiciones auxiliares necesarias para determinar completamente la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no aparecen especificadas todas en el mismo punto, como sucede en los problemas de valor inicial. En ese caso, estamos ante un *problema de contorno*.

En este capítulo abordaremos este tipo de problemas. Para simplificar el análisis nos restringiremos a problemas de segundo orden lineales de la forma

$$\begin{cases} L[u](x) = f(x), & x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $L : C^2((a,b)) \cap C([a,b]) \mapsto C((a,b))$ es el operador lineal definido por

$$L[u](x) = -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x).$$

Supondremos que p, q y f son funciones continuas en $[a,b]$. Cuando sea necesario supondremos mayor regularidad para estas funciones. Se tiene el siguiente resultado de existencia y unicidad.

Teorema 6.1 (Teorema de alternativa). *Se da una y sólo una de las siguientes alternativas:*

- *El problema* (6.1) *tiene solución única.*
- *El problema homogéneo*

$$L[u] = 0, \qquad u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

  tiene solución distinta de la trivial.

Prueba. Si el problema homogéneo tiene solución distinta de la trivial, la solución del problema (6.1), en caso de existir, no es única, pues se puede obtener otra distinta sumándole una solución del problema homogéneo. Por consiguiente, las dos alternativas no se pueden dar simultáneamente.

Veamos que siempre se da una de las dos alternativas. Sean v y w las soluciones de

$$\begin{aligned} &L[v] = f, \qquad v(a) = \alpha, \qquad v'(a) = 0, \\ &L[w] = 0, \qquad w(a) = 0, \qquad w'(a) = 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

La teoría de existencia y unicidad para problemas de valor inicial garantiza que estos dos problemas tienen solución única en $[a, b]$.

Si $w(b) = 0$, entonces w es una solución no trivial del problema homogéneo.

Si $w(b) \neq 0$, la función

$$u_s(x) = v(x) + sw(x) \qquad \text{con } s = \frac{\beta - v(b)}{w(b)}, \tag{6.3}$$

es solución de (6.1). Si esta solución no fuera única, restando dos soluciones distintas obtendríamos una solución no trivial del problema homogéneo. □

Si $q \geq 0$, el problema homogéneo no tiene solución distinta de la trivial y, por tanto, el problema (6.1) tiene solución única. Para probarlo haremos uso del principio del máximo.

Teorema 6.2 (Principio del máximo). *Sea* $u \in C^2((a, b)) \cap C([a, b])$ *y* $q \geq 0$ *en* $[a, b]$.

(i) Si $L[u] \le 0$ *en* (a,b)*, entonces* $\max\limits_{[a,b]} u \le \max\{u(a), u(b), 0\}$.

(ii) Si $L[u] \ge 0$ *en* (a,b)*, entonces* $\min\limits_{[a,b]} u \ge \min\{u(a), u(b), 0\}$.

Prueba. (i) Supongamos para empezar que $L[u] < 0$ en (a,b). Sea $\bar{x} \in (a,b)$ un punto de máximo. Puesto que $u'(\bar{x}) = 0$ y $u''(\bar{x}) \le 0$, si $u(\bar{x}) \ge 0$ se tiene que

$$L[u](\bar{x}) = -u''(\bar{x}) + p(\bar{x})u'(\bar{x}) + q(\bar{x})u(\bar{x}) \ge 0,$$

lo que es una contradicción.

Si la desigualdad no es estricta, consideramos

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{Mx},$$

con $\varepsilon > 0$ pequeño y $M > 0$ grande. Se tiene que

$$L[u_\varepsilon](x) = L[u](x) + \varepsilon e^{Mx}(-M^2 + Mp(x) + q(x)).$$

Tomando M suficientemente grande (cuán grande, depende sólo de $\max_{[a,b]} |p|$ y $\max_{[a,b]} q$), se tiene que $L[u_\varepsilon] < 0$. Así pues,

$$\max_{[a,b]} u < \max_{[a,b]} u_\varepsilon \le \max\{u_\varepsilon(a), u_\varepsilon(b), 0\}.$$

Pasando al límite $\varepsilon \to 0$ se tiene el resultado.

(ii) Aplicamos el apartado (i) a $-u$. □

Corolario 6.3. *Si* $q \ge 0$ *en* $[a,b]$*, el problema* (6.1) *tiene solución única.*

Prueba. Aplicando el principio del máximo al problema homogéneo, vemos que su única solución es la trivial. □

Observación. Si q se hace negativo, el problema homogéneo puede tener soluciones no triviales. Por ejemplo, el problema

$$-u'' + \lambda u = 0, \qquad u(0) = 0 = u(\pi), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

tiene solución no trivial, de la forma $u_n(x) = C\,\mathrm{sen}\,(nx)$, si y sólo si $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$. ♠

La prueba del teorema de alternativa sugiere una forma de encontrar una aproximación numérica de (6.1), resolviendo numéricamente dos problemas de valor inicial. Para ello se obtiene un valor aproximado de s introduciendo en la fórmula (6.3) aproximaciones numéricas de $v(b)$ y $w(b)$. Este método se conoce como *método de disparo*.

Problemas

1. Comprobar que, bajo las hipótesis mencionadas, los problemas de valor inicial (6.2) tienen solución única en $[a, b]$.
2. Determinar, en términos de $\max_{[a,b]} |p|$ y $\max_{[a,b]} |q|$ cómo de grande hay que tomar M en la prueba del teorema 6.2.
3. Consideramos el problema de contorno no lineal

$$-u'' + u = e^u \quad \text{en } (0, 1), \qquad u(0) = 0 = u(1).$$

   Demostrar que todas las soluciones del mismo son no negativas.
4. Resolver el problema

$$-u'' - 100u = 0 \quad \text{en } (0, 1), \quad u(0) = 1, \quad u(2\pi + \epsilon) = 1,$$

   mediante un método de disparo. Para ϵ pequeño, demostrar que $s = 5\epsilon + O(\epsilon^3)$. Explicar qué dificultades computacionales presenta este esquema numérico cuando ϵ es pequeño.
5. Resolver el problema

$$-u'' + 100u = 0 \quad \text{en } (0, 1), \quad u(0) = 1, \quad u(3) = e^{-30},$$

   mediante un método de disparo. Explicar por qué hay que extremar las precauciones al aplicar este esquema numérico.

6.2. Diferencias finitas

El método de disparo es muy sencillo. No obstante, es muy inestable si $w(b)$ está próximo a 0. Por otra parte, no se puede generalizar para tratar problemas de contorno en dimensión mayor que uno (por ejemplo, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cuadrado). Esto nos lleva a considerar una idea alternativa.

Como en el caso de los problemas de valor inicial, consideramos una malla $\{x_n\}_{n=0}^N$ que, para simplificar, supondremos equiespaciada, $x_n = a + nh$, $h = (b-a)/N$. Queremos obtener aproximaciones $u_n \approx u(x_n)$. Para calcular las u_n se sustituyen las derivadas de u que aparecen en la ecuación ordinaria por aproximaciones de *diferencias finitas*. Esto permite transformar la ecuación ordinaria en un sistema de ecuaciones algebraicas. Los métodos resultantes se conocen como *métodos de diferencias finitas* (y también, en este contexto, como *métodos matriciales*).

Veamos un ejemplo concreto de uno de estos métodos. Si u es suficientemente regular, por ejemplo $u \in C^4([x-h, x+h])$, es fácil probar usando desarrollos de Taylor en torno a x, que

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{4!}(u^{(4)}(\xi_+) + u^{(4)}(\xi_-)),\\
u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(u^{(3)}(\eta_+) + u^{(3)}(\eta_-)),
\end{aligned}$$

donde $\xi_\pm$ y $\eta_\pm$ son puntos intermedios, $\xi_+, \eta_+ \in (x, x+h)$, $\xi_-, \eta_- \in (x-h, x)$. Utilizando estos desarrollos en los nodos interiores de la malla tenemos que

$$L_h[u(x_n)] = f(x_n) + O(h^2), \qquad n = 1, \dots, N-1,$$

donde L_h es el operador discreto

$$L_h[v_n] = -\frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2} + p(x_n)\,\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} + q(x_n)\,v_n,$$

que actúa sobre sucesiones $\{v_n\}$.

A nuestra solución numérica u_n le pediremos que verifique esta ecuación de forma exacta, es decir, que

$$L_h[u_n] = f_n, \qquad n = 1, \dots, N-1, \tag{6.4}$$

donde $f_n = f(x_n)$. Estas $N-1$ ecuaciones lineales se ven complementadas con las condiciones de contorno

$$u_0 = \alpha, u_N = \beta.$$

En resumen, para calcular la solución numérica $u_h = (u_1, \dots, u_{N-1})^T$, es preciso resolver el sistema lineal tridiagonal

$$A_h u_h = b_h,$$

donde

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{N-2} & a_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & \dots & 0 & c_{N-1} & a_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} a_n = 2 + q(x_n)h^2, \\ b_n = -1 + \frac{p(x_n)h}{2}, \\ c_n = -1 - \frac{p(x_n)h}{2}, \end{array}$$

siendo el segundo miembro

$$b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h^2} + \frac{p(x_1)\alpha}{2h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\beta}{h^2} - \frac{p(x_{N-1})\beta}{2h} \end{pmatrix}.$$

El que A_h sea tridiagonal ofrece una indudable ventaja computacional: bastarán aproximadamente $5N$ operaciones para resolver el sistema, en lugar de las aproximadamente $N^3/3$ operaciones que harían falta si la matriz no tuviera estructura.

El operador discreto L_h también satisface un principio del máximo.

Teorema 6.4 (Principio del máximo discreto). *Supongamos que* $q \geq 0$ *y que* $\frac{h}{2}|p| \leq 1$ *en* $[a,b]$.

(i) Si $L_h[u_n] \leq 0$ *para* $n = 1, \ldots, N-1$, *entonces* $\max\limits_{0 \leq n \leq N} u_n \leq \max\{u_0, u_N, 0\}$.

(ii) Si $L_h[u_n] \geq 0$ *para* $n = 1, \ldots, N-1$, *entonces* $\min\limits_{0 \leq n \leq N} u_n \geq \min\{u_0, u_N, 0\}$.

Prueba. (i) Si $L_h[u_n] \leq 0$, entonces

$$\left(\frac{2}{h^2} + q_n\right) u_n \leq \frac{1}{h^2}\left(-\frac{hp_n}{2} + 1\right) u_{n+1} + \frac{1}{h^2}\left(\frac{hp_n}{2} + 1\right) u_{n-1}.$$

Puesto que $q_n \geq 0$, si $u_n \geq 0$ se tiene que

$$u_n \leq \frac{1}{2}\left(-\frac{hp_n}{2} + 1\right) u_{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{hp_n}{2} + 1\right) u_{n-1}.$$

Es decir, el valor de u_n en un nodo interior donde $u_n \geq 0$ es menor que una media aritmética ponderada de los valores en los dos nodos adyacentes. Por consiguiente, el valor de u_n en el nodo interior no puede ser mayor que en los adyacentes y por tanto no hay máximos interiores positivos, a menos que la función sea constante.

(ii) Aplicamos el apartado (i) a $-u_n$. □

Para calcular las aproximaciones u_n tenemos que resolver el problema (6.4). ¿Tiene dicho problema solución única? La respuesta es afirmativa: si hubiera dos soluciones, al aplicar el Teorema 6.4 a la diferencia de ambas se concluye que ésta es trivial.

¿Se parece la solución numérica cada vez más a la teórica, a medida que vamos tomando más puntos en la malla? Siguiendo lo que hacíamos para el problema de valor inicial, diremos que el método *converge* si

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0 \leq n \leq N} |u(x_n) - u_n| = 0 \quad \text{si} \lim_{N\to\infty} |u(a) - u_0| = 0 = \lim_{N\to\infty} |u(b) - u_N|.$$

Análogamente, si además

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u(x_n) - u_n| = O(h^p) \quad \text{si } |u(a) - u_0| = O(h^p),\ |u(b) - u_N| = O(h^p),$$

cuando $h \to 0^+$, diremos que el método es *convergente de orden* p.

El esquema en diferencias finitas que acabamos de desarrollar es convergente de orden 2 si q es estrictamente positiva. La prueba está basada en el principio del máximo discreto y en el hecho de que el *residuo* o *error de truncación*,

$$R_n = L_h[u(x_n)] - f_n,$$

es decir, lo que le falta a la solución teórica para satisfacer la ecuación del método, es una $O(h^2)$.

Teorema 6.5. *Si* $q(x) \geq q_* > 0$*, entonces la solución del problema* (6.4) *converge con orden 2 a la solución del correspondiente problema continuo* (6.1).

Prueba. Sea $e_n = u(x_n) - u_n$. Sabemos que existe una constante $C > 0$, independiente de n, tal que $|R_n| \leq Ch^2$, $|e_0|, |e_N| \leq Ch^2/q_*$. Como $L_h[h^2] = q_n h^2 \geq q_* h^2$, se tiene que

$$L_h[e_n - \frac{Ch^2}{q_*}] = L_h[e_n] - \frac{C}{q_*} L_h[h^2] \leq R_n - Ch^2 \leq 0, \qquad 0 < n < N.$$

Aplicando el principio del máximo discreto concluimos que $e_n \leq \frac{Ch^2}{q_*}$.

Análogamente se demuestra que $e_n \geq -Ch^2/q_*$, lo que prueba que el método es convergente de orden 2. □

Se pueden usar distintas aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas que aparezcan en la ecuación. De esta forma se obtienen, para un mismo problema, métodos diversos.

Problemas

1. Consideramos el problema de contorno

$$-u''(x) + \operatorname{sen}(x) u'(x) + u(x) = \cos^2 x \quad \text{en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad u(0) = 0 = u\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

   (i) Demostrar que $u(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$.

(ii) Sea $\{u_n\}_{n=0}^N$ una aproximación de la solución obtenida mediante el método de diferencias finitas descrito en esta sección. Demostrar que $u_n \geq 0$, $n = 0, \ldots, N$.

(iii) Calcular $\{u_n\}_{n=0}^N$ en el caso $N = 3$.

2. Definimos un operador en diferencias T por

$$T[u_n] = a_n u_n - b_n u_{n-1} - c_n u_{n+1}, \qquad n = 1, \ldots, N-1,$$

donde

$$b_n > 0, \quad c_n > 0, \quad a_n \geq b_n + c_n.$$

Si el conjunto de valores $\{v_n\}_{n=0}^N$ satisface $T[v_n] \leq 0$, $n = 1, \ldots, N-1$, probar que

$$\max_{0 \leq n \leq N} v_n = \max\{v_0, v_N\}.$$

Análogamente, demostrar que si $T[v_n] \geq 0$, $n = 1, \ldots, N-1$, entonces

$$\min_{0 \leq n \leq N} v_n = \min\{v_0, v_N\}.$$

3. A lo largo de la sección hemos tomado siempre mallas equiespaciadas. Pero nada nos impide considerar mallas que no lo sean.

(i) Construir un esquema en diferencias finitas para mallas generales basado en aproximaciones de tres puntos de las derivadas primera y segunda de u.

(ii) Decidir si el esquema numérico satisface un principio del máximo discreto.

(iii) Calcular el residuo.

(iv) Probar la convergencia del método, determinando el orden de convergencia.

4. Desarrollar un esquema de cinco puntos del mayor orden posible para resolver el problema

$$-u'' = f \quad \text{en } (0,1), \qquad u(0) = 0 = u(1).$$

6.3. Extensiones

6.3.1. Otras condiciones de frontera

Supongamos que en $x = a$ en lugar de una condición de Dirichlet tenemos una condición de Neumann. Concretamente, consideramos el problema

$$L[u] = f \quad \text{en } (a, b), \qquad u'(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \tag{6.5}$$

Desarrollando por Taylor tenemos que

$$u'(a) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + O(h).$$

Despreciando el error,

$$u'(a) \approx \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h},$$

lo que sugiere tomar

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha$$

para la solución numérica. Esto permite eliminar u_0 en la primera ecuación, que queda ahora

$$\left(\frac{1}{h^2} + q_1 - \frac{p_1}{2h}\right) u_1 + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right) u_2 = f_1 + \alpha h \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right).$$

El inconveniente es que, mientrás que la aproximación de la ecuación es de orden 2, la aproximación de $u'(a)$ es tan sólo de orden 1; eso nos hace perder el orden de convergencia 2.

Una idea alternativa es utilizar la aproximación en diferencias centradas de la derivada,

$$u'(a) = \frac{u(a+h) - u(a-h)}{2h} + O(h^2),$$

que es de orden dos. Introduciendo el nodo ficticio $x_{-1} = a - h$, pedimos a la solución numérica que

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha. \tag{6.6}$$

Desgraciadamente, esto no nos permite eliminar u_0, que ahora es una incógnita. Necesitamos una ecuación más, que se obtiene pidiendo que la ecuación discretizada se verifique para $n = 0$,

$$-\frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} + p_0\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} + q_0 u_0 = f_0.$$

La condición de frontera se usa para eliminar u_{-1} de esta ecuación. De esta forma llegamos a un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, $u_0, \dots, u_{N-1}$.

La misma idea se puede emplear para tratar condiciones más generales, de la forma

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) = \beta_3,$$

6.3.2. Problemas no lineales

El método de diferencias finitas se puede usar también para resolver problemas no lineales, por ejemplo

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad x \in (a, b), \qquad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

Discretizando se llega al sistema de $N - 1$ ecuaciones no lineales

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = f(x_n, u_n, \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}), \qquad 0 < n < N,$$

junto con las condiciones de contorno

$$u_0 = \alpha, \qquad u_N = \beta,$$

que permiten reducir el número de incógnitas a $N - 1$. Este sistema se puede resolver por ejemplo por Newton.

Se pueden tratar otras condiciones de frontera haciendo las modificaciones obvias.

6.3.3. Problemas en dimensión 2

El método de diferencias finitas permite tratar problemas de contorno en dimensiones mayores, siempre que la geometría del dominio sea sencilla. Como ejemplo consideramos el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en un rectángulo,

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2), \qquad u = g \quad \text{en } \partial\Omega. \tag{6.7}$$

Se puede ajustar una red uniforme formada por los puntos de coordenadas

$$(x_i, y_j) = (a_1 + ih, b_1 + jk), \qquad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M,$$

donde los tamaños de paso h y k están determinados por

$$h = \frac{a_2 - a_1}{N}, \qquad k = \frac{b_2 - b_1}{M}.$$

Queremos encontrar números u_{ij} que aproximen a la verdadera solución en los nodos de la red,

$$u_{ij} \approx u(x_i, y_j).$$

Para ello, si u es suficientemente regular, discretizamos el laplaciano, aproximando las derivadas segundas que en él aparecen por diferencias centradas,

$$\begin{aligned} \Delta u(x_i, y_j) \quad &= \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} + O(h^2) \\ &\quad + \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2} + O(k^2). \end{aligned}$$

Así pues,

$$-\Delta_{hk}[u(x_i, y_j)] = f_{ij} + O(h^2 + k^2),$$

donde Δ_{hk} es el *operador Laplaciano discreto*,

$$\Delta_{hk}[v_{ij}] = \frac{v_{i+1\,j} - 2v_{ij} + v_{i-1\,j}}{h^2} + \frac{v_{i\,j+1} - 2v_{ij} + v_{i\,j-1}}{k^2}.$$

A nuestra solución numérica u_{ij} le pediremos que satisfaga el problema de Dirichlet discreto para la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta_{hk}[u_{ij}] = f_{ij} & \text{en los nodos interiores,} \\ u_{ij} = g_{ij} & \text{en los nodos de la frontera.} \end{cases} \tag{6.8}$$

Por tanto, para un nodo interior, $0 < i < N$, $0 < j < M$, tenemos

$$-\frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{h^2} - \frac{u_{i\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i\,j-1}}{k^2} = f_{ij},$$

relación que no sólo involucra a u_{ij}, sino también a los valores en los nodos adyacentes, a la izquierda y a la derecha, arriba y abajo. Por este motivo se la conoce como *fórmula de cinco puntos*. Así, para calcular la solución aproximada es preciso resolver un sistema lineal de $(N-1) \times (M-1)$ ecuaciones cuyas incógnitas son todos los elementos de la matriz u_{ij}, excepto los que corresponden a los nodos de frontera, que ya se conocen.

La solución converge si

$$\lim_{N,M\to\infty} \max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{ij}| = 0.$$

El estudio de la convergencia es similar al del caso unidimensional; está basado en que el residuo es una $O(h^2 + k^2)$ y en el principio del máximo discreto.

Problemas

1. Consideramos el problema de contorno (6.5) con $q > 0$.

   (i) Demostrar que se da una y sólo una de las siguientes alternativas: o bien el problema tiene solución única, o bien el problema homogéneo asociado,

   $$L[u] = 0, \qquad u'(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

   tiene solución distinta de la trivial.

   (ii) Escribir el problema en *forma autoadjunta*, es decir, como

   $$-(ru')' + zu = g \quad \text{en } (a,b), \qquad u'(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

   Comprobar que se tiene $r, z > 0$.

(iii) Demostrar que el problema homogéneo asociado no tiene solución distinta de la trivial; concluir, gracias al teorema de alternativa demostrado en el apartado (i), que el problema (6.5) tiene solución única. *Indicación:* Escribirlo en forma autoadjunta, multiplicar por u e integrar por partes.

(iv) Consideramos la discretización de la ecuación

$$L_h[u_n] = f_n, \qquad n = 0, \dots, N-1,$$

junto con las condiciones de contorno (6.6) y $u_N = 0$. Demostrar que el sistema lineal resultante tiene una única solución.

(v) Demostrar que el método numérico del apartado (iv) es convergente de orden 2.

(vi) Aplicar el método numérico del apartado (iv) con $N = 3$ para encontrar una aproximación numérica a la solución del problema

$$\begin{cases} -u''(x) + \operatorname{sen}(x)u'(x) + u(x) = \cos^2 x \quad \text{en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ u'(0) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

2. Determinar el orden de la aproximación de diferencias finitas:

$$f'(x) \approx -\frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}f(x) - 2f(x+h) + \frac{1}{2}f(x+2h)\right),$$

indicando la regularidad requerida para la función f. ¿En qué tipo de situación puede ser útil una fórmula de este estilo?

3. Desarrollar un esquema en diferencias finitas *de orden 2* para resolver el problema

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en } (0,1), \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

4. Considéramos la ecuación

$$-u''(x) + u(x) = f(x),$$

junto con las condiciones de contorno *periódicas*

$$u(0) = u(\pi/2), \qquad u'(0) = u'(\pi/2).$$

(i) Desarrollar razonadamente un esquema en diferencias finitas de orden 2 para resolver el problema. El esquema dará lugar a un sistema lineal

$$A_h\, u_h = f_h,$$

donde $u_h = (u_0, \ldots, u_{N-1})^T$, siendo u_n, $n = 0, \ldots, N$ las aproximaciones de la solución en los nodos de la malla, $x_n = n\, h$, con $h = 1/N$. Dar explícitamente A_h y f_h.

(ii) Probar que el sistema lineal resultante tiene solución única.

5. Encontrar una aproximación de diferencias finitas de la solución del problema de contorno

$$-u''(x) = -\frac{2}{x} u(x) u'(x) \quad \text{en } (1,2), \qquad u(1) = \frac{1}{2}, \quad u(2) = \frac{2}{3},$$

en una malla equiespaciada con $N = 3$.

6. Consideramos el problema (6.7) y su discretización (6.8) mediante la fórmula de cinco puntos.

(i) Si v_{ij} satisface que $-\Delta_{hk}[v_{ij}] \leq 0$ para todos los nodos interiores, demostrar que

$$\max_{i,j} v_{ij} = \max_{\text{nodos frontera}} v_{ij}.$$

Análogamente, demostrar que si $-\Delta_{hk}[v_{ij}] \geq 0$ para todos los nodos interiores, entonces

$$\min_{i,j} v_{ij} = \min_{\text{nodos frontera}} v_{ij}.$$

(ii) Demostrar que el problema (6.8) tiene solución única.

(iii) Probar que existe una constante $C > 0$ independiente de i y de j tal que

$$|-\Delta_{hk}[u(x_i, y_j)] - f(x_i, y_j)| \leq C(h^2 + k^2).$$

(iv) Demostrar que la solución u_{ij} del problema (6.8) con $g_{ij} = 0$ satisface que

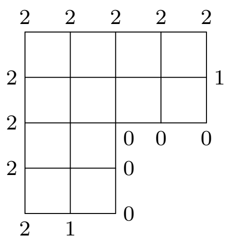
$$|u_{ij}| \leq \frac{1}{16}|f|_\infty(a^2 + b^2), \qquad a = a_2 - a_1,\ b = b_2 - b_1,$$

donde $|f|_\infty = \max\limits_{ij} |f_{ij}|$. *Indicación:* Aplicar el principio del máximo discreto a $u_{ij} \pm \frac{1}{4}|f|_\infty w_{ij}$, con $w(x, y) = (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2$, siendo (c_1, c_2) las coordenadas del centro del rectángulo.

(v) Probar que el método propuesto converge. Más concretamente, demostrar que existe una constante $C > 0$ independiente de i y de j tal que

$$|u(x_i, y_j) - u_{ij}| \leq C(h^2 + k^2).$$

7. Sea u una función armónica en Ω con $u = g$ en $\partial\Omega$, donde Ω es el dominio de la figura. Aproximarla usando la fórmula de los cinco puntos con $h = k = 1$ y los valores de g indicados en ella.

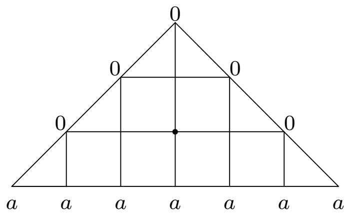


Si se incrementase el valor de g en cada uno de los puntos del contorno en una milésima, determinar cómo se modificaría el valor de la solución.

8. Considérese la ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$, en el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ con las condiciones de contorno $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -1$ si $x = 1$, $0 < y < 1$, $u = 0$ en el resto de la frontera de Q. Aproximar la solución utilizando la fórmula de cinco puntos con $h = k = 1/3$. *Nota*: Recuérdese que la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ se define como $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior unitaria.

9. Determinar el valor de a para que la solución de la ecuación de Laplace en el dominio de la figura, con las condiciones de contorno de Dirichlet

señaladas tome el valor 1 en el punto señalado con un círculo, utilizando la red del dibujo con $h = k = 1$ y el esquema estándar en diferencias finitas de 5 puntos.



10. Cuando se emplea el método de diferencias finitas para resolver la ecuación de Poisson en un dominio curvo Ω difícil de transformar en un cuadrado con un cambio sencillo, se consideran los *nodos de frontera* obtenidos por la intersección de las rectas horizontales y verticales de la malla con $\partial\Omega$. Cada nodo interior estará rodeado por otros cuatro nodos, ya sean interiores o de frontera. Procediendo como en la fórmula de cinco puntos, se puede encontrar una combinación lineal de los valores de la función en ellos que aproxime el laplaciano. Aplicar esta idea al problema $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 3x - x^2 - y^2$ donde $\Omega = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 3x, \ y \geq 0\}$, tomando $h = k = 1$.
11. Expresar la ecuación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
en la forma
$$\nabla \cdot (A \nabla u) = 0,$$
donde A es una matriz real 2×2. Desarrollar el esquema resultante considerando como aproximaciones a la divergencia y al gradiente
$$\nabla \cdot \approx (\partial_x^+, \partial_y^+), \qquad \nabla \approx \begin{pmatrix} \partial_x^- \\ \partial_y^- \end{pmatrix},$$
y escribir la ecuación en diferencias finitas resultante para el caso de una malla con $h = k$. *Notación:*
$$\partial_x^+ f(x) = (f(x+h) - f(x))/h; \qquad \partial_y^+ f(y) = (f(y+k) - f(y))/k;$$
$$\partial_x^- f(x) = (f(x) - f(x-h))/h; \qquad \partial_y^- f(y) = (f(y) - f(y-k))/k.$$