Instrucciones. Los problemas marcados **A** y **B** serán resueltos por los profesores en las clases de problemas de los días 14, 15 y 16 de Abril de 2008. Después, en la misma clase, deberás hacer y entregar los marcados con la fecha correspondiente y que sea de la misma paridad que la penúltima cifra de tu DNI.

Definición. *Dada una lista de vectores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$*, su* **matriz de Gram** *es la tabla de multiplicar escalarmente esos vectores:* $G = \left(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j\right)_{k\times k}$*. Es siempre simétrica, y es definida positiva si y sólo si la lista de vectores es linealmente independiente.*

A. Consideramos $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Sea $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^4$ el plano vectorial con base

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1,-1,1,-5)\,,\,(1,0,0,-3)\}\,.$$

Sea el vector $\mathbf{v} = (1,4,0,1)$ y $\mathbf{v}_0$ su proyección ortogonal sobre $\mathbb{V}$.

- Calcula $\mathbf{v}_0$ mediante la matriz de Gram de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
- Comprueba que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(0,1,-1,2)\,,\,(1,1,-1,-1)\}$ es también base de $\mathbb{V}$, y calcula los vectores:

$$\mathbf{v}_0' = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\,\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\,\mathbf{v}_2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_0'' = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\,\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\,\mathbf{w}_2\,.$$

B. Halla la expresión analítica de las aplicaciones lineales $f,\, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, siendo f la proyección ortogonal sobre el plano $\{x+3y-2z=0\}$ y g la reflexión ortogonal sobre ese mismo plano.

Lunes impar. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (2,6,-7,3)\,,\ \{\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\} = \{(1,1,3,3)\,,\,(2,0,5,3)\} \ \text{ y } \ \{\mathbf{w}_1\,,\,\mathbf{w}_2\} = \{(0,2,1,3)\,,\,(1,-1,2,0)\}\,.$$

¿Coincide $\mathbf{v}_0'$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}_0''$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{2x+y-z=0\}$.

Lunes par. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (4,1,2,1)\,,\ \{\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\} = \{(1,0,1,1)\,,\,(2,1,2,0)\} \ \text{ y } \ \{\mathbf{w}_1\,,\,\mathbf{w}_2\} = \{(0,1,0,-2)\,,\,(5,2,5,1)\}\,.$$

¿Coincide $\mathbf{v}_0'$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}_0''$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{x+y-3z=0\}$.

Martes impar. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (3,2,0,2)\,,\ \{\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\} = \{(1,1,1,0)\,,\,(0,1,1,-1)\} \ \text{ y } \ \{\mathbf{w}_1\,,\,\mathbf{w}_2\} = \{(1,0,0,1)\,,\,(1,2,2,-1)\}\,.$$

¿Coincide $\mathbf{v}_0'$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}_0''$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{x-y+z=0\}$.

Martes par. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (3,2,2,1)\,,\ \{\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\} = \{(0,1,1,1)\,,\,(1,2,1,1)\} \ \text{ y } \ \{\mathbf{w}_1\,,\,\mathbf{w}_2\} = \{(1,1,0,0)\,,\,(-1,1,2,2)\}\,.$$

¿Coincide $\mathbf{v}_0'$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}_0''$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{2x+2y+z=0\}$.

Miércoles impar. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (2,3,2,0)\,,\ \{\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\} = \{(1,1,1,-1)\,,\,(1,2,0,0)\} \ \text{ y } \ \{\mathbf{w}_1\,,\,\mathbf{w}_2\} = \{(0,-1,1,-1)\,,\,(3,4,2,-2)\}\,.$$

¿Coincide $\mathbf{v}_0'$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}_0''$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{x+y+z=0\}$.

Miércoles par. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (2,-2,1,1)\,,\ \{\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\} = \{(1,3,0,-2)\,,\,(0,-1,0,1)\} \ \text{ y } \ \{\mathbf{w}_1\,,\,\mathbf{w}_2\} = \{(1,0,0,1)\,,\,(1,2,0,-1)\}\,.$$

¿Coincide $\mathbf{v}_0'$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}_0''$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{-x+4y+z=0\}$.
