

1. Calcula la dimensión del subespacio afín de  $\mathbb{A}^5$  generado por los puntos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 2, -1, 0, 4), & P_2 &= (0, -1, 3, 5, 1), \\ P_3 &= (4, -2, 0, 0, -3), & P_4 &= (3, -1, 2, 5, 2). \end{aligned}$$

2. Considera la familia de planos  $2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda - 4 = 0$  en  $\mathbb{A}^3$ .

- Demuestra que estos planos tienen una recta en común.
- Determina los planos de esta familia que pasan por el punto  $(1, -1, 2)$ .
- Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta:

$$L = \{x + 3z - 1 = 0, y - 5z + 2 = 0\}.$$

3. Sea  $\lambda$  un número real. Considera los puntos de  $\mathbb{A}^3$ :  $A = (\lambda, 0, 0)$ ,  $B = (1, 2, 1)$ ,  $C = (1, 0, -1)$  y  $D = (2, 2, \lambda)$ , y los conjuntos:

$$S_1 = \{A, B\}, \quad S_2 = \{A, B, C\}, \quad S_3 = \{A, B, D\}.$$

- Halla las ecuaciones implícitas de los subespacios afines engendrados por  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ .
  - Calcula las dimensiones de los subespacios anteriores en función de  $\lambda$ , y estudia las posiciones relativas entre ellos.
4. Sea  $M$  la variedad lineal de  $\mathbb{A}^4$  engendrada por los puntos:  $P_0 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $P_1 = (2, 1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (3, 1, 0, 0)$ ,  $P_3 = (4, 2, 0, 0)$ . Sea  $L$  la variedad lineal de ecuaciones paramétricas  $x_1 = 2\lambda + 5$ ,  $x_2 = \lambda + 1$ ,  $x_3 = \lambda + 1$ ,  $x_4 = \lambda + 1$ . Halla las ecuaciones implícitas de  $L + M$  y de  $L \cap M$  y comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.
5. Estudia la dependencia afín de los puntos de  $\mathbb{A}^3$ :  $A_1 = (1, 0, 1)$ ,  $A_2 = (4, 3, -2)$ ,  $A_3 = (2, 1, 0)$ . Halla las ecuaciones vectoriales, paramétricas, implícitas del subespacio afín que engendran.
6. En  $\mathbb{A}^4$  se considera los puntos de coordenadas  $Q_0 = (1, 0, 3, 1)$ ,  $Q_1 = (1, 1, 3, 0)$ ,  $Q_2 = (0, 1, 1, 0)$ . Sea  $N$  el subespacio afín de  $\mathbb{A}^4$  que engendran.

- Estudia la dependencia afín de  $Q_0$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$ . Halla la dimensión de  $N$ .
- Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $N$ .

7. Sea  $\mathbb{A}^4(\mathbb{K})$  un espacio afín de dimensión 4 sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ . Sea  $\mathcal{R}_0$  un sistema de referencia cartesiano en  $\mathbb{A}^4(\mathbb{K})$ . Considera los hiperplanos de ecuaciones (respecto de  $\mathcal{R}_0$ )

$$\pi_1 : 1 + x + y + z + t = 0, \quad \pi_2 : 2 + x - y + z - t = 0, \quad \text{y el punto } P = (1, 1, 1, -4).$$

- Verifica que  $P \in \pi_1$ , y halla un sistema de referencia afín,  $\mathcal{R}$ , de  $\pi_1$  que no tenga ninguno de sus puntos en el hiperplano  $\pi_2$ .
- Fijado el sistema de referencia  $\mathcal{R}$  del apartado anterior, halla las ecuaciones de la variedad lineal de dimensión 2 que pasa por  $P$ , está contenida en  $\pi_1$ , y es paralela a  $\pi_1 \cap \pi_2$ .

8. Considera los puntos de  $\mathbb{A}^3$ :  $P_0 = (0, 0, 1)$ ,  $P_1 = (0, 1, 0)$ ,  $P_2 = (0, 0, 0)$ ,  $P_3 = (1, 0, 0)$ ,  $Q_0 = (2, 1, 1)$ ,  $Q_1 = (1, 0, 1)$ ,  $Q_2 = (1, 1, 0)$ ,  $Q_3 = (0, 0, -1)$ .

- Demuestra que  $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  y  $\mathcal{R}_0 = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$  son referencias afines de  $\mathbb{A}^3$ .
- Halla las ecuaciones del cambio de coordenadas cartesianas de la referencia  $\mathcal{R}$  a la referencia  $\mathcal{R}_0$ .
- Halla las ecuaciones del cambio de coordenadas baricéntricas de la referencia  $\mathcal{R}$  a la referencia  $\mathcal{R}_0$ .

9. Considera los siguientes puntos de  $\mathbb{A}^4$ :  $A = (1, -2, 3, 1)$ ,  $B = (0, 0, 1, 5)$ ,  $C = (3, -1, 5, 0)$ . Halla la ecuación del haz de hiperplanos que tiene como base el plano  $A + B + C$ .

10. En el espacio afín real  $\mathbb{A}^3$  se consideran las rectas:

$$L_1 = \{x + y + z = 0, x + 2y = 0\}, \quad L_2 = \{2x + 2y + z = 3, x + y = 2\}$$

$$L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2, 2x + y + z = 0\}.$$

Demuestra que se cruzan dos a dos y que existe un plano  $\pi$  paralelo a las tres rectas.

11. Sea  $(X, E, \varphi)$  un espacio afín, donde  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo ordenado  $\mathbb{K}$ . Un subconjunto  $Y \subset X$  se dice convexo si para todo par de puntos  $P, Q \in Y$  el segmento de extremos  $P$  y  $Q$  está contenido en  $Y$ . Demuestra que todo subespacio afín es convexo.

12. Considera el plano afín  $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}_3$ .

- Calcula cuántos puntos y rectas hay en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ . Calcula el cardinal de una recta.
- Calcula el número de rectas paralelas a una dada, y el número de haces de rectas paralelas que hay en  $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ .

13. En el plano afín  $\mathbb{A}^2$  se considera el triángulo  $ABC$  y con relación a él los sistemas de referencia:  $\mathcal{R} = \{A; AB, AC\}$ , y  $\mathcal{R}_0 = \{B; BA, BC\}$ .

- Halla las ecuaciones que permiten pasar de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}_0$ .
- Determina el conjunto de puntos del plano que tienen las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

14. Para cada  $i = 1, 2, 3$ , tómesese la recta  $L_i \subset \mathbb{A}^2$  de ecuación  $a_i x + b_i y + c_i = 0$ , con  $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ . Compruébese que la relación:

$$(\dagger) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

es una condición necesaria para que las tres rectas sean concurrentes (es decir, se corten las tres en el mismo punto).

Dése un ejemplo de tres rectas no concurrentes que verifiquen  $(\dagger)$ .

Supongamos que se da la condición  $(\dagger)$ . ¿Qué condiciones geométricas y algebraicas han de verificarse para que las tres rectas sean concurrentes?

15. Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y  $(X, E, \varphi)$  un espacio afín sobre  $\mathbb{K}$ . Dados tres puntos alineados  $A_1, A_2, A_3$  de  $X$ , se llama *razón simple* de  $A_1, A_2, A_3$ , y se escribe  $(A_1A_2A_3)$ , al escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que

$$A_1A_3 = \lambda A_1A_2.$$

La razón simple está definida siempre que  $A_1 \neq A_2$ , es 0 si  $A_1 = A_3$ , y es 1 si  $A_2 = A_3$ .

- Si  $A_2 \neq A_3$  y  $(\alpha, \beta)$  son las coordenadas baricéntricas de  $A_1$  en el sistema de referencia  $\{A_2, A_3\}$ , demuestra que  $(A_1A_2A_3) = -\alpha/\beta$ .
  - Supongamos que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Demuestra que el punto  $A_1$  está en el segmento que une  $A_2$  con  $A_3$ , si y sólo si  $(A_1A_2A_3) < 0$ .
  - Sean  $P_0, P_1, P_2$  tres puntos distintos de  $\mathbb{C}$ . Da una condición necesaria y suficiente en función de su razón simple para que formen un triángulo equilátero.
16. Considera los puntos de  $\mathbb{A}^3$ :  $P_0 = (0, 0, 1)$ ,  $P_1 = (0, 1, 0)$ ,  $P_2 = (0, 0, 0)$ ,  $P_3 = (1, 0, 0)$ ,  $Q_0 = (1, 1, 1)$ ,  $Q_1 = (3, 1, 1)$ ,  $Q_2 = (2, 2, 2)$ ,  $Q_3 = (1, 0, 5)$ .
- Demuestra que  $\mathcal{R}_c = \{P_0; P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$  y  $\mathcal{R}'_c = \{Q_0; Q_0Q_1, Q_0Q_2, Q_0Q_3\}$  son referencias cartesianas de  $\mathbb{A}^3$ , y que  $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  y  $\mathcal{R}' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$  son referencias afines.
  - Halla las ecuaciones del cambio que transforma coordenadas cartesianas en la referencia  $\mathcal{R}_c$  en coordenadas cartesianas en la referencia  $\mathcal{R}'_c$ .
  - Halla las ecuaciones del cambio que transforma coordenadas baricéntricas en la referencia  $\mathcal{R}$  en coordenadas baricéntricas en la referencia  $\mathcal{R}'$ .
17. Sean  $L_1, L_2, L_3$  rectas en el espacio afín  $\mathbb{A}^3$  con direcciones  $F_1, F_2, F_3$  respectivamente tales que  $F_1 + F_2 + F_3 = \mathbb{R}^3$ . Demuestra que:

- Existe una única recta  $L$  en  $\mathbb{A}^3$  paralela a  $L_1$  que corta a  $L_2$  y a  $L_3$ .
- Existe un único plano  $\pi$  paralelo a  $L_3$  que contiene a  $L_2$ .
- Para todo punto  $p \in \mathbb{A}^3$  existe una única recta  $L_0$  que pasa por  $p$ , es paralela al plano  $\pi$ , y corta a  $L_1$ .
- Calcula los  $L, \pi$  y  $L_0$  de los apartados anteriores cuando

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, L_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ y } p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

18. Encuentra las ecuaciones cartesianas de  $L_1 + L_2$  y paramétricas de  $L_1 \cap L_2$  siendo  $L_1, L_2$  las variedades lineales en el espacio afín  $\mathbb{A}^4$  dadas por

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$