1. Halla las ecuaciones de la homotecia de $\mathbb{A}^4$ de centro el punto $O = (1, 3, -1, 1)$ y razón 2.

2. Halla las ecuaciones de la afinidad definida por los pares de puntos:

$$P_1 = (0, 0),\ P_1' = (3, 6),\ P_2 = (-1, 2),\ P_2' = (22, 48),\ P_3 = (2, -2),\ P_3' = (-11, 28).$$

   Determina los puntos fijos de esta aplicación afín.

3. Halla las ecuaciones de la aplicación afín que transforma los puntos del sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ en los puntos $Q_0 = (2, -3, 1, 1)$, $Q_1 = (1, -2, 0, 2)$, $Q_2 = (0, 4, -1, -2)$ y $Q_3 = (3, -9, 2, 5)$ respectivamente, donde las coordenadas de los puntos Q_i están referidas al sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}$.

4. Considera una referencia cartesiana $\mathcal{R} = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ en $\mathbb{A}^3$, y la afinidad f de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{1}{2}(x + y + z + 1) \\ y' &=& -x + 2y + z + 1 \\ z' &=& \dfrac{1}{2}(3x - 3y - z - 3) \end{array}\right.$$

   a) Demuestra que la aplicación así definida es una proyección.
   b) Halla la variedad de puntos fijos de f.
   c) Halla la dirección de proyección de f.

5. En el espacio afín $\mathbb{A}^3$ considera la afinidad de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 2 - x + y - z \\ y' &=& 1 + 2x + 2y + 2z \\ z' &=& 1 - 2z \end{array}\right.$$

   Encuentra las figuras transformadas del plano de ecuación $x+y-z = 2$ y de la circunferencia de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, y comprueba que transforma rectas paralelas en rectas paralelas. Calcula sus puntos fijos.

6. En el espacio afín $\mathbb{A}^3$ considera la afinidad dada en la referencia $\mathcal{R} = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& 2 - x + y - z \\ y' &=& 1 + x + y + z \\ z' &=& -x - 2z \end{array}\right.$$

   a) Halla las ecuaciones de la figura en la que se transforma la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en el plano $z = 2$.
   b) Halla las ecuaciones de la afinidad en la referencia cartesiana $\mathcal{R}' = \{O_0; u_1', u_2', u_3'\}$, donde $O_0 = (0, 3, 2)$, $u_1' = (1, 0, 1)$, $u_2' = (0, 1, 1)$, $u_3' = (0, 0, 1)$ respecto a la referencia $\mathcal{R}$.

7. Dadas la variedad lineal $L = (1,1,1) + \langle(1,1,0)\rangle$ y el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:
$$F = \langle(1,0,1)\,,\,(0,1,1)\rangle$$
encuentra la expresión en coordenadas de:

   a) La proyección sobre L de dirección F.
   b) La simetría sobre L de dirección F.

8. Las afinidades f, g de $\mathbb{A}^3$ dadas en coordenadas cartesianas canónicas por
$$f \equiv \begin{cases} x' &= 1-y+z \\ y' &= 1-x+z \\ z' &= z \end{cases} \qquad g \equiv \begin{cases} x' &= 1+y-2z \\ y' &= 2-2x+3y-4z \\ z' &= 1-x+y-z \end{cases}$$
son simetrías o proyecciones. Determina el tipo de f y g y la variedad lineal y el subespacio vectorial correspondiente en cada caso.

9. Demuestra que existe una única afinidad en un plano afín que transforma cada uno de los vértices de un triángulo dado en el punto medio del lado opuesto. Estudia esta afinidad.

10. Sea f una afinidad de un espacio afín real.

    a) Demuestra que si f^2 tiene algún punto fijo, entonces f también.
    b) Demuestra que si existe un número natural n tal que f^n tiene un punto fijo, entonces f también.

11. Sea (A, E, φ) un espacio afín. Sea $f : A \longrightarrow A$ una simetría. Demuestra que existen una variedad lineal L de A y un subespacio vectorial F de E, complementario de F_L[1] en E, tal que si π es la proyección de A sobre L paralela a F entonces $f = 2\pi - \mathrm{id}_A$.

12. Sea $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_n\}$ una referencia baricéntrica de un espacio afín (A, E, φ). Considera r puntos $Q_1, \ldots, Q_r$ en A y $(\lambda_{i,0}, \ldots, \lambda_{i,n})$ las coordenadas baricéntricas de Q_i en la referencia $\mathcal{R}$. Considera la matriz $\Lambda = (\lambda_{i,j})$. Demuestra que para que el subespacio afín engendrado por $Q_1, \ldots, Q_r$ tenga dimensión $r-1$, es condición necesaria y suficiente que la matriz Λ tenga rango r.

13. Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cruzan en $\mathbb{A}^3$.

    a) Halla las ecuaciones de todas las afinidades de $\mathbb{A}^3$ que tienen a L_1 como recta de puntos fijos, y a L_2 como recta invariante. (Sugerencia: Define una referencia cartesiana de $\mathbb{A}^3$ a partir de dos puntos de L_1 y dos puntos de L_2. Expresa las afinidades en coordenadas respecto de esta referencia).
    b) Dado un punto $P \in \mathbb{A}^3$ arbitrario, determina el subconjunto de $\mathbb{A}^3$ que forman las imágenes de P por todas las afinidades del apartado anterior. ¿Qué es, geométricamente, dicho subconjunto?

[1] F_L denota aquí el subespacio vectorial asociado a la variedad lineal L.