

1. Sea  $\{P; e_1, e_2, e_3\}$  una referencia ortonormal del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{A}, E)$ . Designemos por  $s$  la simetría respecto al eje  $P + \langle (a, b, c) \rangle$  y por  $\tilde{s}$  su endomorfismo asociado.
  - a. Demuestra que, para todo  $v \in E$ ,  $\tilde{s}(v) + v$  es un vector propio de valor propio 1 (o bien es el  $\bar{0}$ ).
  - b. Deduce de **a** la matriz de  $\tilde{s}$  en función de  $a, b, c$ .
  - c. Usa **b** para hallar las ecuaciones de la rotación de ángulo  $\pi$  respecto de la recta intersección de los planos  $3x - 4y - 25 = 0, z = 2$ .
2. En los siguientes casos calcula la distancia  $d(P, L)$ , un punto  $Q \in L$  tal que  $d(P, Q) = d(P, L)$  y una recta que pase por  $P$  y corte a  $L$  perpendicularmente:
  - a.  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 + 1 = 0\}$  en el espacio euclídeo usual  $\mathbb{R}^2$ .
  - b.  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$  en el espacio euclídeo usual  $\mathbb{R}^3$ .
3. En los siguientes casos, calcula la distancia  $d(L_1, L_2)$  y puntos  $Q_i \in L_i$  ( $i = 1, 2$ ) tales que  $d(L_1, L_2) = d(Q_1, Q_2)$ :
  - a.  $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$  en el espacio euclídeo usual  $\mathbb{R}^3$ .
  - b.  $L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$  en el espacio euclídeo usual  $\mathbb{R}^4$ . ¿Son únicos los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  en las condiciones anteriores?
4. Sea  $\{P; e_1, e_2, e_3\}$  una referencia ortonormal del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{A}, E)$ . Considera la simetría,  $\sigma$ , respecto al plano de ecuación  $ax + by + cz + d = 0$  y  $\tilde{\sigma}$  el endomorfismo de  $E$  asociado a  $\sigma$ .
  - a. Demuestra que, para todo  $v \in E$ ,  $\tilde{\sigma}(v) - v$  es ortogonal al plano de simetría.
  - b. Halla la matriz de  $\tilde{\sigma}$  en función de  $a, b, c$ .
  - c. Halla las ecuaciones de la simetría respecto al plano  $x + 2y - 3z + 2 = 0$ .
5. En  $\mathbb{R}^3$ , considera el producto escalar cuya matriz en la base  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla la distancia del punto  $(-1, 1, -2)$  al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas  $a = (1, -1, 1), b = (-2, 1, 3)$  y  $c = (4, -5, -2)$  en la referencia  $\{O; \mathcal{B}\}$ .

6. Determina el lugar geométrico de las imágenes del punto  $(1, 1)$  por todos los giros de  $\mathbb{R}^2$  de ángulo  $\pi/2$  y centro sobre la recta  $x + y = 1$ .
7. Considera  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - a. Calcula la ecuación de la recta  $\ell_\alpha$  que pasa por los puntos  $P = (1, \alpha, -1)$  y  $Q = (1, 2\alpha, -2)$ .
  - b. Calcula el punto  $R_\alpha$  simétrico del punto  $M = (1, 0, -2)$  con respecto a la recta  $\ell_\alpha$ .
  - c. Demuestra que el lugar geométrico de los puntos  $R_\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , es la recta

$$(-1, 0, 2) + \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

8. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:
- La simetría deslizante de eje paralelo a la recta  $2x + y = 3$  y que transforma  $(2, 1)$  en  $(1, 0)$ .
  - El giro de ángulo  $\pi/3$  que lleve  $(2, 1)$  en  $(1, 0)$ .
9. Demuestra que la composición de tres simetrías en  $\mathbb{R}^2$  de ejes concurrentes es otra simetría y determina su eje.
10. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de  $\mathbb{R}^3$ :
- La simetría respecto al plano  $3x - y + 2z = 1$ .
  - La rotación helicoidal respecto al eje  $\langle (1, -1, 0) \rangle$  con ángulo  $\pi$  y vector de traslación  $(2, -2, 0)$ .
  - La composición de las dos isometrías anteriores.
11. Estudia la composición de dos simetrías en  $\mathbb{R}^2$  de ejes paralelos.
12. Demuestra que la composición de dos simetrías en un plano, cuyos ejes se cortan en un punto, es una rotación. Determina su centro y ángulo.
13. Estudia las siguientes isometrías (o movimientos) del plano  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

Estudia la isometría composición de las dos anteriores.

14. Estudia las siguientes isometrías de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{cases}$$

Estudia la composición de las dos isometrías anteriores.

15. Estudia (clasifica y calcula sus características geométricas) las isometrías del espacio afín euclídeo usual  $\mathbb{R}^3$  dadas por  $f(x) = A + Tx$  donde:

a.  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ó  $A = A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (estudiar las dos).

b.  $T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ó  $A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (estudiar las dos).

c.  $T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  y  $A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ó  $A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  (estudiar las dos).

16. Determina las ecuaciones de las siguientes isometrías del espacio afín usual  $\mathbb{R}^3$  en el referencial canónico:

a. La simetría respecto de la recta  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ .

b. La simetría deslizante respecto de la recta anterior (i.e. giro de 180 grados) con vector de deslizamiento  $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

c. La simetría respecto del plano  $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\}$ .

d. La simetría deslizante respecto del plano anterior con vector de deslizamiento  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .