1. Sea P un espacio proyectivo y X e $Y \in P$ dos variedades proyectivas que no se cortan. Demostrar que $V(X;Y) = P$ si y sólo si $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(P) - 1$.

2. Calcular las ecuaciones del plano X de $\mathbb{P}^4$ que contiene a la recta $r : x_0 - x_4 = x_1 - x_3 = x_2 = 0$ y pasa por el punto $(1 : 1 : 1 : 0 : 0)$. Encontrar otro plano Y de $\mathbb{P}^4$ que corte a X exactamente en un punto de la recta r. Determinar la variedad generada por los planos X e Y .

3. Sea X un subconjunto de un espacio proyectivo P. Demostrar que X es una variedad proyectiva si y sólo si para cualesquiera dos puntos x, $y \in X$ la recta proyectiva que generan, $V(x, y)$, está contenida en X.

4. Probar que 3 planos cualesquiera de un espacio proyectivo de dimensión 3 siempre se cortan.

5. Determinar si los siguientes conjuntos de puntos están alineados:

a.$[1, 2, 3], [1, 1, -2], [2, 1, -9]$; **b**.$[1, 2, -1], [2, 1, 0], [0, -1, 3]$; **c**.$[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, 1, 1]$

6. Demostrar que en un espacio proyectivo de dimensión n cualquier colección de puntos independientes se puede completar hasta que tenga $n+1$ puntos independientes. Hacerlo para los puntos $(0 : 1 : 1 : 0)$ y $(-1 : 0 : 1 : 0)$ de $\mathbb{P}^3$.

7. Determinar el punto de intersección de cada uno de los siguientes pares de rectas de $\mathbb{P}^2$:

a. $r : x - y - z = 0$ y $s : x + 5y + 2z = 0$; **b**. $t : x + 2y - z = 0$ y $w : x + 2y - 4z = 0$.

8. Describir las siguientes variedades proyectivas:

a. $X \subset \mathbb{P}^3$ generada por $[1, 0, 0, 1]$ y $[1, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 0, 1]$ y $[2, 1, 1, 2]$.

b. $X \subset \mathbb{P}^4$ generada por el punto $[0, 1, 1, 0, 1]$ y el plano de ecuaciones

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 = x_1 + x_2.$$

9. Consideremos la base $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcular una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ que tenga $\mathcal{B}$ como base vectorial asociada. Deducir razonadamente si hay alguna otra referencia proyectiva con esta misma propiedad.

10. Sean $x_0 = (1 : 1 : 0 : 2)$, $x_1 = (1 : 0 : 1 : 0)$, $x_2 = (0 : 0 : 0 : 1)$, $x_3 = (0 : 1 : 0 : 1)$ de $\mathbb{P}^3$.

a. Comprobar que son independientes.

b. Buscar otro punto proyectivo x_4 de modo que los puntos x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 formen una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}^3$. Deducir razonadamente si la elección del último punto es única.

c. Calcular una base de $\mathbb{R}^4$ asociada a $\mathcal{R}$. Deducir razonadamente si esta base es única.

d. Calcular las coordenadas homogéneas del punto $(1 : 1 : 1 : 1)$ respecto a $\mathcal{R}$.

11. Sean $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$, $(c_1 : c_2 : c_3)$ coordenadas homogéneas de tres puntos a, b y c de $\mathbb{P}^2$. Probar que la condición necesaria y suficiente para que los puntos estén alineados es que:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Formular esta condición para dimensiones superiores.

12. Sean $\mathcal{R} = \{x_0 = (1 : 1 : 1), x_1 = (1 : 0 : 0), x_2 = (0 : 1 : 0), x_3 = (0 : 0 : 1)\}$
y $\mathcal{R}' = \{y_0 = (1 : 0 : 0), y_1 = (1 : 1 : 1), y_2 = (0 : 1 : 0), y_3 = (0 : 0 : 1)\}$

dos referencias proyectivas. Calcular las ecuaciones del cambio de referencia y las coordenadas del punto $(1 : 2 : 0)$ respecto a ambos.

13. Sea X un subespacio proyectivo de dimensión d de $\mathbb{P}$ y sea p un punto fuera de X. Demostrar que la unión de todas las rectas $V(p,q)$ con $q \in X$ es un subespacio proyectivo de dimensión $d+1$.

14. Determinar las ecuaciones de la transformación de la referencia proyectiva $\mathcal{R}$ a la referencia proyectiva $\mathcal{R}'$ si los puntos de referencia y el punto unidad de $\mathcal{R}'$ se expresan en $\mathcal{R}$ por coordenadas $[4,5,1]$, $[3,-1,12]$, $[6,16,2]$ y $[5,1,1]$ respectivamente.

15. Las ecuaciones del cambio de un sistema de referencia proyectivo en otro son

$$x' = 8x + 3y + 2z\,, \quad y' = 3x + 4y\,, \quad z' = 2x + 2z\,.$$

Encontrar los tres puntos cuyas coordenadas son las mismas en ambos sistemas de referencia.

16. Sea $\pi : \mathbb{P}^3 \to \{x_0 = 0\}$ la proyección cónica de centro el punto $[1,0,1,0]$. Hallar las ecuaciones de π y las de la restricción de π al plano de ecuación $x_2 = 0$.

17. Las coordenadas de un punto general son $[x,y,z]$ en un sistema de coordenadas para el cual A, B, C son los puntos del triángulo de referencia y D es el punto unidad, y son $[x',y',z']$ en el sistema de referencia en el cual D, B, C son los puntos de referencia y A es el punto unidad.

- **a**. Encontrar las ecuaciones que expresan x', y', z' en términos de x, y, z.
- **b**. Determinar sus puntos fijos (puntos del plano proyectivo que tienen las mismas coordenadas, salvo escalar, en ambos sistemas de referencia).
- **c**. Determinar la recta fija (recta que tiene la misma ecuación, salvo escalar, en ambos sistemas de referencia).
- **d**. Encontrar las ecuaciones de la transformación del primer sistema al sistema en el que A, B, C, D tienen, respectivamente, coordenadas: $(-1:1:1)$, $(1:-1:1)$, $(1:1:-1)$, $(1:1:1)$.

18. Demostrar que si una homografía $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ tiene un hiperplano H invariante y dos puntos fijos P, $Q \notin H$, entonces tiene una recta de puntos fijos.

19. En el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ se tienen dos cuaternas de rectas L_1, L_2, L_3, L_4 y L_1', L_2', L_3', L_4' tales que ninguna cuaterna contiene tres rectas concurrentes. Demostrar que existe exactamente una homografía $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $f(L_i) = L_i'$ para $i = 1,2,3,4$.

20. Demostrar y enunciar la proposición dual de las siguientes afirmaciones:

- **a**. Tres planos en un espacio proyectivo de dimensión tres tienen intersección no vacía.
- **b**. Sea X un subespacio proyectivo de un espacio proyectivo $\mathbb{P}$ y H un hiperplano de $\mathbb{P}$. Si X no está contenido en H, entonces $\dim(H \cap X) = \dim(X) - 1$.

21. Trazar, con la única ayuda de una regla, la recta que une un punto de una hoja de papel con el punto de intersección de dos rectas de la hoja que se cortan fuera de ella. (Indicación: Usar el Teorema de Desargues).

22. Demostrar que es posible trazar la recta que une dos puntos de una hoja de papel usando una regla más corta que la distancia entre los puntos. (Indicación: Usar el Teorema de Desargues).

23. Sean $p,q,r,p',q',r' \neq 0$. Probar que el triángulo $x'y'z'$ cuyos vértices son los puntos $[1,p,p']$, $[q',1,q]$, $[r,r',1]$ está en perspectiva con el triángulo de referencia si y solo si $pqr = p'q'r'$.

24. **a.** Demostrar el Teorema de Desargues en el espacio: *Sean abc y $a'b'c'$ dos triángulos propios situados en planos distintos de $\mathbb{P}^3$ y tales que abc y $a'b'c'$ están en perspectiva desde un punto v que no pertenece a los planos. Entonces los tres puntos:*

$$P := V(a,b) \cap V(a',b')\,;, \qquad Q := V(b,c) \cap V(b',c')\,; \qquad R := V(c,a) \cap V(c',a')\,;$$

están alineados.

b. Enunciar el teorema dual.

c. Demostrar que el Teorema de Desargues en el espacio implica el Teorema de Desargues en el plano.