Parte I: Elección en Condiciones de Certidumbre

Tema 3: Demandas marshalliana y hicksiana.

El problema del consumidor (I)

El *problema del consumidor* que analizamos en este capítulo se corresponde con la siguiente pregunta:

Dados unos precios y unos ingresos, ¿cuánto demandará (comprará) de cada bien un individuo racional con ciertos gustos o preferencias?

En lo que sigue asumiremos que las preferencias son racionales y continuas, y por tanto representables por una función de utilidad continua $U(q)$. Por ello el problema puede enunciarse así:

Escoger la cesta q *que maximiza* $U(q)$ *sujeto a la restricción presupuestaria* (y a la restricción de no-negatividad $q \in \Re^2_+$).

El problema del consumidor (II)

- Estudiaremos primero las condiciones que aseguran que este problema tenga solución, es decir, cuándo existe al menos una cesta óptima.
- Después estudiaremos algunas propiedades de esta solución (cuando exista) e introduciremos una serie de conceptos relacionados.

Demanda marshalliana: Definición

La solución del problema del consumidor para un vector de precios $p=(p_1, p_2)$ y una renta Y es el vector de *demanda marshalliana* (también llamada demanda normal), que denotamos como $q(p, Y)=[q_1(p, Y), q_2(p, Y)]$.

En otras palabras, el vector $q(p, Y)$ nos indica cuánto compra el consumidor cuando los precios y la renta son iguales a p e Y, respectivamente.

Demanda marshalliana: Existencia (I)

Puede demostrarse lo siguiente:

1. Si todo precio p_i es mayor que cero e Y es mayor o igual que cero, entonces existe al menos un $q\,(p, Y)$.

Esta proposición se demuestra usando el siguiente teorema matemático: Todo problema de maximización con restricciones tiene solución si la función objetivo es continua y si las restricciones definen un conjunto compacto (o sea, cerrado y acotado).

Existencia (II)

- La solución puede representarse gráficamente. En la figura 1 tenemos un caso con solución (en estos ejemplos, las curvas de indiferencia son rectas), mientras que en la figura 2 (donde el precio del bien 1 es cero) no existe solución.

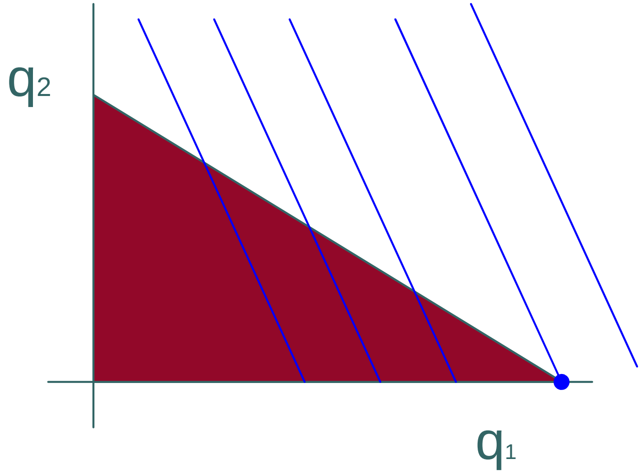


Figura 1

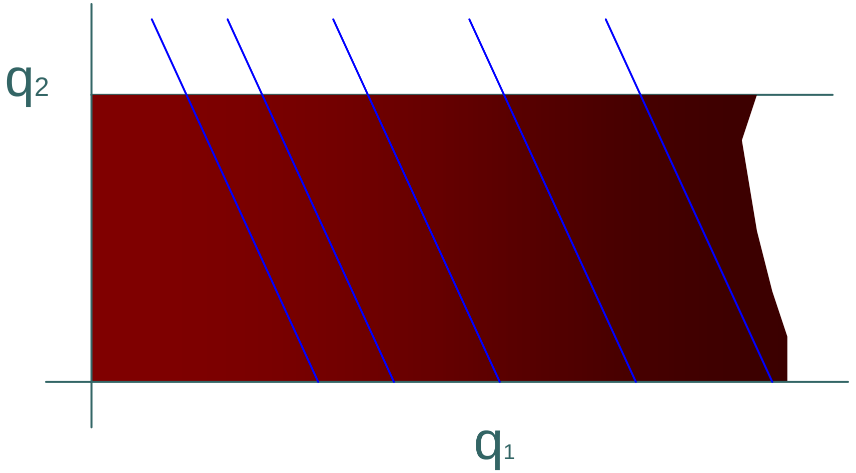


Figura 2

Demanda marshalliana: Homogeneidad grado cero (I)

Otro resultado fácilmente demostrable:

2. Si q es solución para p e Y, entonces q también es solución para $\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2)$ y λY, donde λ es un número real mayor que cero.

En otras palabras, la demanda marshalliana es *homogénea de grado cero*: $q(p, Y) = q(\lambda p, \lambda Y)$ para todo $\lambda>0$.

(Demuestre esta proposición)

Nota: Se sigue que si una función de p, Y no es homogénea de grado cero, entonces no puede ser una función de demanda.

Homogeneidad grado cero (II)

Entre otras cosas, la homogeneidad grado cero significa que la cantidad demandada no cambia cuando variamos la unidad monetaria con la que se miden precios y renta.

Por ejemplo, la demanda de bienes no debería cambiar simplemente por pasar precios y renta de pesetas a euros (en este caso λ es más o menos igual a 1/166).

[Nota: ¿Es esta una predicción empíricamente válida?]

Homogeneidad grado cero (III)

O pensemos en países con tasas muy elevada de inflación (hiperinflación). A veces los precios llegan a niveles tan elevados que resultan una molestia para hacer cálculos, contabilidad, etc.

Entonces se suele recurrir a cambiar de unidad monetaria, de modo que los nuevos precios y rentas sean (nominalmente) mucho menores que con la antigua.

De acuerdo con la homogeneidad grado cero, este cambio no debería afectar a la cantidad demandada de ningún producto.

Homogeneidad grado cero (IV)

Ejemplo: Con este billete de 100.000 Z$ (dólares de Zimbabwe, sur de África) podía comprarse una barra de pan en Junio del 2006. El banco central decidió en Septiembre del 2006 introducir el nuevo Z$, equivalente a 1000Z$ antiguos. O sea, todos los precios perdieron tres ceros.

Nota: La tasa de inflación anual rondaba el 1000% (en comparación, la interanual española en Agosto 2010 fue del 1,8%).

Demanda marshalliana: Unicidad (I)

Otro resultado importante:

3. Si las preferencias son racionales, continuas *y estrictamente convexas* entonces la solución del problema del consumidor para cualquier p e Y, es un *único* $q(p, Y)$.

Es decir, cuando las preferencias son estrictamente convexas, nuestra teoría hace una única predicción de consumo para cada p e Y, y por tanto $q_1(p, Y)$ y $q_2(p, Y)$ son funciones.

Unicidad (II)

Cuando las preferencias no son estrictamente convexas, como en las dos figuras siguientes, el problema del consumidor puede tener varias soluciones para alguna combinación de precios y renta.

Nota: La restricción presupuestaria es la línea roja a trazos.

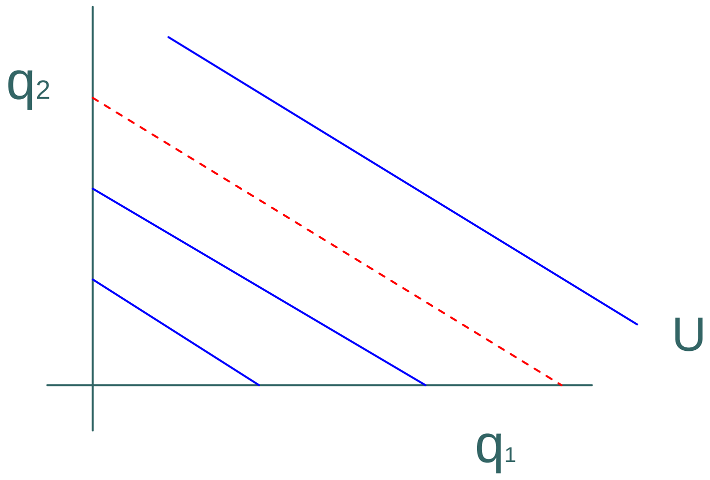


Figura 3

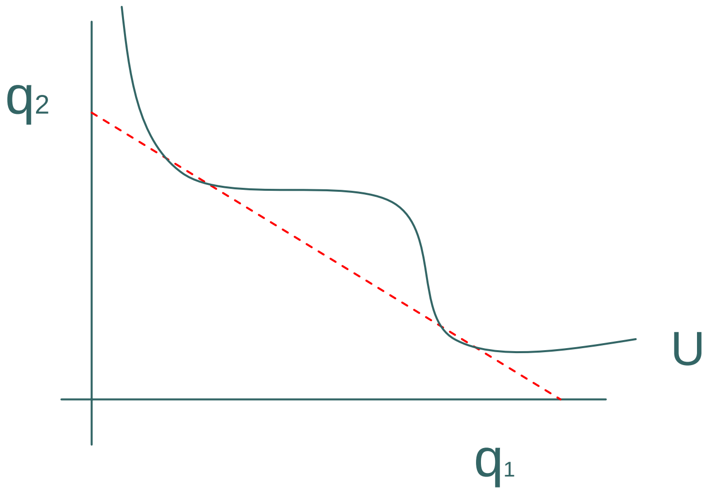


Figura 4

Demanda marshalliana: Ley de Walras

Finalmente, tenemos que:

4. Si las preferencias son racionales, continuas *y estrictamente monótonas* entonces la solución del problema del consumidor $q\,(p,\,Y)$ satisface

$$q \cdot p = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 = Y$$

para cualquier p e Y

Esto es, un consumidor con preferencias estrictamente monótonas nunca se deja renta sin gastar. Gráficamente, la solución (o soluciones) se halla en la recta de presupuesto.

Nota gráfica

- El caso en el que las preferencias son racionales, continuas, estrictamente convexas y monótonas es el típicamente considerado en todos los libros de texto cuando se hacen representaciones gráficas (¡Ojo con las soluciones de esquina!).

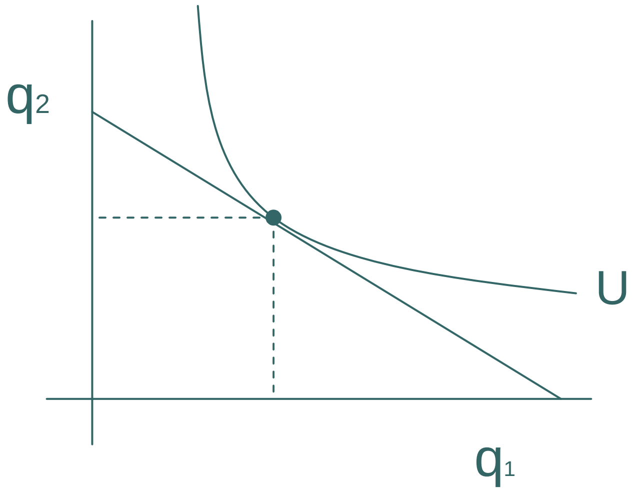


Figura 5

A modo de resumen

- Principales ideas:

1. Si el consumidor es racional, tiene preferencias continuas, y ningún bien es gratuito, siempre existe al menos una cesta óptima para todo nivel de precios y renta.
2. Si además sus preferencias son estrictamente convexas, sólo existe una cesta óptima para todo nivel de precios y renta.
3. Lo anterior es especialmente importante porque implica la existencia de una función de demanda. Si lo anterior no se cumple, por el contrario, puede no haberla.
4. Si a las hipótesis enunciadas en el punto (1) añadimos monotonía estricta, podemos estar seguros que el consumidor no se dejará renta sin gastar.

Función indirecta de utilidad (I)

- Para unos precios y una renta cualesquiera, esta función nos indica la utilidad obtenida por el individuo al consumir la cesta que es óptima a esos precios y renta (o una cualquiera de las cestas si hay varias soluciones).
- En otras palabras, nos indica la utilidad máxima alcanzable dada una restricción presupuestaria.
- La denotaremos como $v(p, Y)$ y, si $q(p, Y)$ es única para todo p, Y, la definimos formalmente como

$$v(p, Y) = U\,[q(p, Y)]$$

Función indirecta de utilidad (II)

- Nota: Recuérdese que si unas preferencias admiten una representación funcional $U(q)$ entonces cualquier transformación monótona de $U(q)$ también representa a las preferencias.

- Por esta razón $v(p, Y)$ tampoco tiene una única forma: Para cualquier transformación monótona de $U(q)$, $U[q(p, Y)]$ es válida como función indirecta de utilidad.

El problema dual del consumidor (I)

- Consideremos unas preferencias racionales, continuas y estrictamente monótonas, así como una función de utilidad $U(q)$ que las represente.

- El problema dual consiste en hallar la cesta que minimice el gasto $q \cdot p$ necesario para alcanzar cierto nivel de utilidad U^*.

- Es decir, en este problema la función objetivo es el gasto y la restricción es el nivel de utilidad.

El problema dual del consumidor (II)

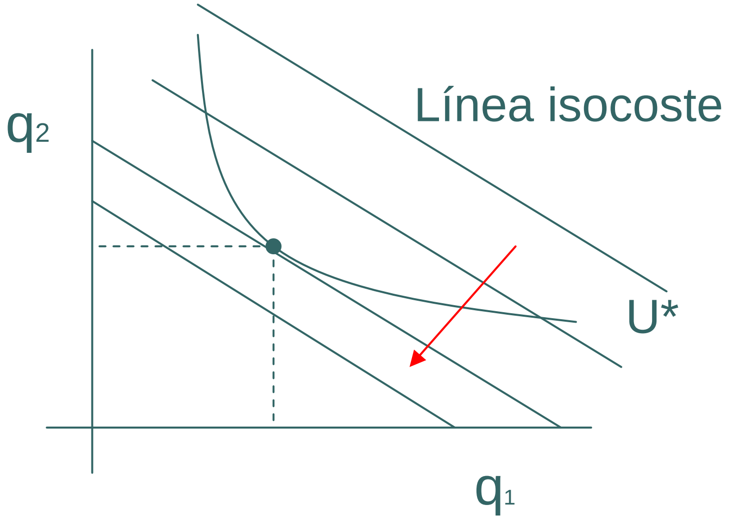
- Este problema es interesante no porque los consumidores hagan esto en la realidad, sino porque nos permite entender mejor cómo los cambios en los precios afectan al comportamiento y el bienestar de los consumidores (lo veremos en los siguientes temas).

- Nota: Se suele decir que un problema es el dual de otro si invierte los papeles de función objetivo y restricción, y/o minimiza en vez de maximizar.

El problema dual del consumidor (III)

El problema dual se ilustra gráficamente en la figura 6. La cesta óptima $q(p, U^*)$ es el punto de la curva de indiferencia U^* que se encuentra en la *línea isocoste* con precios p más baja posible. La flecha indica hacia donde se gasta menos.

Figura 6



Demanda hicksiana

- Dados los supuestos que hemos hecho sobre las preferencias, el problema dual siempre tiene solución.
- Si además las preferencias son estrictamente convexas, entonces la solución es única.
- En este último caso se obtiene la *función de demanda hicksiana (o compensada)* $h(p,U^*)=[h_1(p,U^*), h_2(p,U^*)]$.
- Esta función nos indica la solución del problema dual (es decir, la cesta que minimiza el gasto) para cualquier nivel de precios y de utilidad.

Función de gasto

- Dada la hicksiana $h(p,U^*)$, podemos asimismo obtener la *función de gasto* $e(p,U^*)$.
- Esta función nos dice cuánto se gasta si se consume la cesta $h(p,U^*)$ a los precios p. Matemáticamente,

$$e(p,U^*) = p \cdot h(p,U^*) = p_1 \cdot h_1(p,U^*) + p_2 \cdot h_2(p,U^*)$$

- De la definición de demanda hicksiana se sigue otra posible interpretación de $e(p,U^*)$: Es el gasto mínimo necesario para alcanzar cierto nivel de utilidad U^* a unos precios p.

¿Cómo obtener las demandas marshalliana y hicksiana?

- Dadas las preferencias de un consumidor, es teóricamente posible hallar sus demandas marshalliana y hicksiana por métodos gráficos. En la práctica, no obstante, este método suele ser muy poco eficiente.
- Es mucho más fácil resolver el problema del consumidor (y su dual) utilizando las técnicas matemáticas de maximización (y minimización) de funciones.
- Nota: Al final de este tema se repasa muy brevemente una de estas técnicas, es decir, el método de Kühn-Tucker (para exposiciones más detalladas, pueden consultarse textos de matemáticas para economistas).

El problema del consumidor con derivadas (I)

[Nota técnica: Para poder aplicar Kühn-Tucker o cualquiera de estas técnicas, es necesario que la función a maximizar (o minimizar) se pueda derivar.

Por ejemplo, en el problema del consumidor:

Escoger la cesta q *que maximiza* $U(q)$ *sujeto a la restricción presupuestaria* (y a la restricción de no-negatividad $q \in \Re^2_+$).

Hace falta que la función de utilidad sea diferenciable. Para garantizar esto, tenemos que introducir un supuesto adicional acerca de las preferencias: Diferenciabilidad]

El problema del consumidor con derivadas (II)

- Una ordenación de preferencias es <u>diferenciable</u> si existe una función de utilidad diferenciable que la represente (nota: esta función tiene que ser asimismo continua, ¿por qué?).

- Gráficamente hablando, la idea es que las curvas de indiferencia no tienen picos. Por ejemplo, las preferencias Leontieff de la figura 7 *no* son diferenciables (pero *sí* son racionales y continuas).

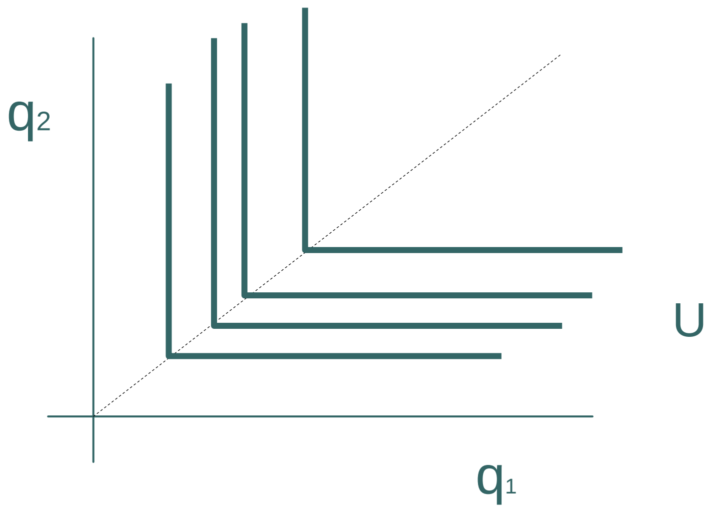


Figura 7

El problema del consumidor (III)

- Supongamos entonces que las preferencias son diferenciables y que por tanto podemos aplicar las técnicas mencionadas.
- En tal caso, toda cesta (o cestas) óptima tiene que cumplir las <u>condiciones de primer orden</u> (ver resumen al final del tema).
- [Nota: Recuérdese que para ser óptimo no basta con satisfacer las condiciones de primer orden; también deben cumplirse las condiciones de segundo orden.
- No obstante, a veces no es necesario verificar este último punto. Por ejemplo, si la función de utilidad es cóncava entonces las condiciones de primer orden son tanto necesarias como suficientes.]

El problema del consumidor (IV)

- Consideremos entonces un caso importante.
- Cuando el óptimo del problema del consumidor se encuentra en algún punto de la recta presupuestaria (sin incluir los extremos),
- o en otras palabras, si el óptimo es tal que el consumidor se gasta toda la renta y consume algo *de cada bien*;
- es fácilmente demostrable que las condiciones de primer orden implican lo siguiente:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{p_2} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Interpretación (I)

- Interpretemos en términos tanto geométricos como económicos esta condición que acabamos de obtener.
- Geométricamente, es una condición de tangencia:

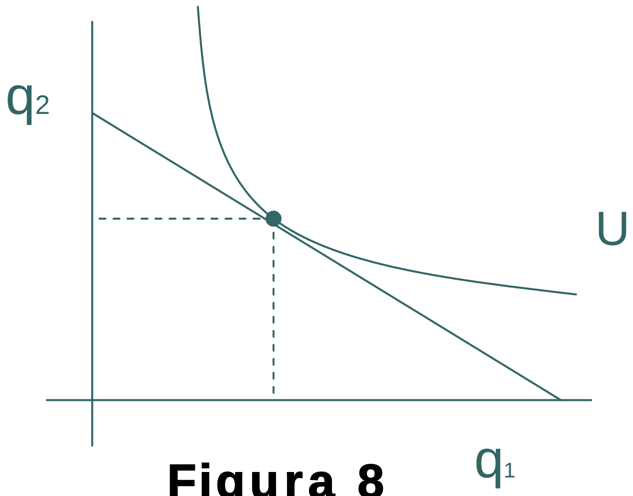


Figura 8

Interpretación (II)

En efecto, aplicando el teorema de la función implícita puede demostrarse que la derivada de una curva de indiferencia en uno cualquiera de sus puntos $q=(q_1, q_2)$ es igual a

$$-\frac{\partial U / \partial q_1}{\partial U / \partial q_2}$$

Nota: Este cociente (con signo positivo) recibe el nombre de *relación (o tasa) marginal de sustitución del bien 1 por el bien 2*.

Interpretación (III)

Asimismo, la pendiente de la recta presupuestaria es igual al siguiente ratio de precios:

$$-\frac{p_1}{p_2}$$

Por tanto, y como queríamos demostrar, las dos pendientes son iguales (o sea, hay una tangencia) si en alguno de los puntos de la recta presupuestaria se cumple que:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Interpretación (IV)

- Demos ahora una interpretación económica de esta condición.

- La relación marginal de sustitución (RMS) en un punto nos dice cuántas unidades (infinitesimales) del bien 2 se necesitan para compensar al consumidor (o sea, mantener la utilidad constante) la pérdida de una unidad del bien 1.

- Por otro lado, el cociente de precios nos indica a qué tasa se intercambian los dos bienes en el mercado (en concreto, cuántas unidades del bien 2 pueden comprarse por el precio de una unidad del bien 1).

Interpretación (V)

Por tanto podemos hacer un argumento de arbitraje:

1. Si la RMS en un punto es menor que el cociente de precios, el consumidor puede incrementar su utilidad reduciendo el consumo del bien 1 en una unidad y aumentando en p_1/p_2 el consumo del bien 2.

2. Algo similar (pero al contrario) ocurre si la RMS en un punto es mayor que el cociente de precios.

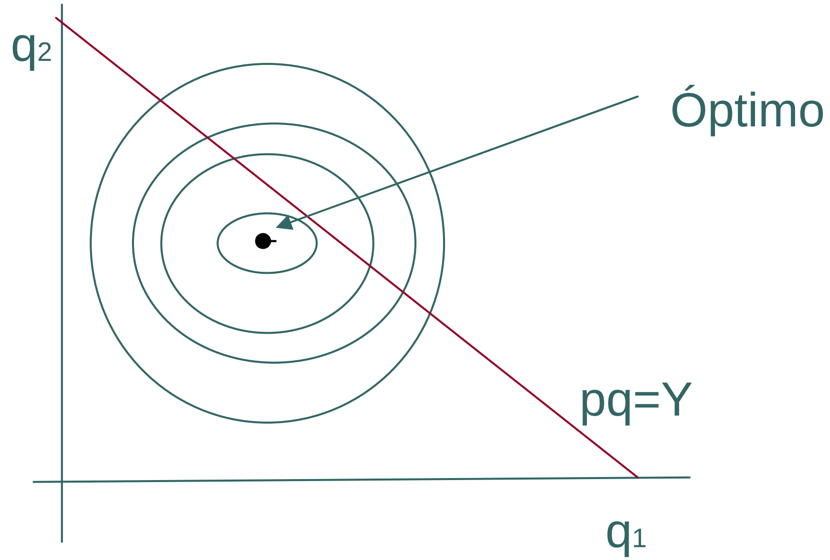
Como ninguna de estas cosas puede ocurrir en un óptimo, se sigue que la RMS en todo óptimo (del tipo que estamos considerando) ha de ser igual al cociente de precios.

El problema del consumidor (V)

- Importante: Dependiendo de las preferencias del agente, la(s) cesta(s) óptima puede estar o no estar en la recta de presupuesto.

- Por ejemplo, la figura 9 muestra unas preferencias en forma de 'montaña' -esto es, con un punto de saciación- y una recta de presupuesto tales que el óptimo no está en la recta. Este óptimo no satisfaría la propiedad que acabamos de interpretar (también pasa esto con las soluciones de esquina).

Figura 9



Programación matemática: El problema base

- Kühn-Tucker nos sirve para resolver el siguiente problema:

maximizar $\quad f(x)$

sujeto a n restricciones de los tipos $g_i(x) = c_i$ y $g_i(x) \leq c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde $f, g_1, g_2, \ldots, g_n$ son funciones definidas en $\Re^k$ (k es un número entero) y con imagen en $\Re$, mientras que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

Programación matemática: La 'recetilla' (I)

- Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Formar la función lagrangiana, definida como:

$$L = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i(x) - c_i)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son números reales, llamados multiplicadores de Lagrange.

Programación matemática: La 'recetilla' (II)

2. Obtener las k primeras derivadas (una para cada variable x_j ($j=1, \ldots, k$)) e igualar a cero, esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

3. Escribir las n restricciones.

4. Para toda restricción de <u>desigualdad</u> i, escribir

$$\lambda_i \geq 0$$

Programación matemática: La ‘recetilla’ (III)

5. Escribir las condiciones de holgura complementaria para cada *restricción de desigualdad* i, es decir:

$$\lambda_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{g}_{\mathrm{i}}(x)-\mathrm{c}_{\mathrm{i}}\right)=0$$

6. Juntar las ecuaciones obtenidas en los pasos 2 a 5 (llamadas condiciones de *primer orden*) y resolver este sistema de ecuaciones. Todo máximo de la función $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ es *necesariamente* solución de este sistema.

- ¡Ojo!: ¡La inversa no es cierta! Es decir, no toda solución del sistema es necesariamente un máximo. Para determinar este punto hay que recurrir a las condiciones de *segundo* orden (consultar textos especializados).

Programación matemática: Variantes

Si lo que queremos es minimizar $f(x)$, basta con aplicar el método visto a la función $-f(x)$. Todo mínimo de $f(x)$ debe ser solución de las ecuaciones resultantes.

Si alguna inecuación es del tipo ‘mayor o igual que’, multiplicaremos *ambos* lados de la inecuación por -1 y luego cambiaremos el sentido de la desigualdad. Como se tiene que

$$\mathrm{g_i}(x) \geq \mathrm{c_i} \text{ es equivalente a } -\mathrm{g_i}(x) \leq -\mathrm{c_i},$$

podemos por consiguiente aplicar la ‘recetilla’ como siempre.

Nota: Si sólo hay restricciones de igualdad, el problema se simplifica enormemente, porque en los pasos 4 y 5 no habría que hacer nada.