



Parte I: Elección en Condiciones de Certidumbre

Tema 4: Estática Comparativa - Efectos renta
y sustitución



Estática comparativa (I)

- La estática comparativa estudia cómo cambia la variable a explicar cuando alguno de los parámetros varía.
- En el problema del consumidor, la variable es la cantidad demandada (o demanda a secas) y los parámetros son los precios y la renta.
- Introduciremos varios conceptos importantes en lo que sigue. Para ello asumiremos que el problema del consumidor tiene una única solución para cualquier combinación de precios y renta – es decir, $q_j(p, Y)$ es una función para todo bien $j=1, 2$. Este supuesto simplifica mucho el análisis.

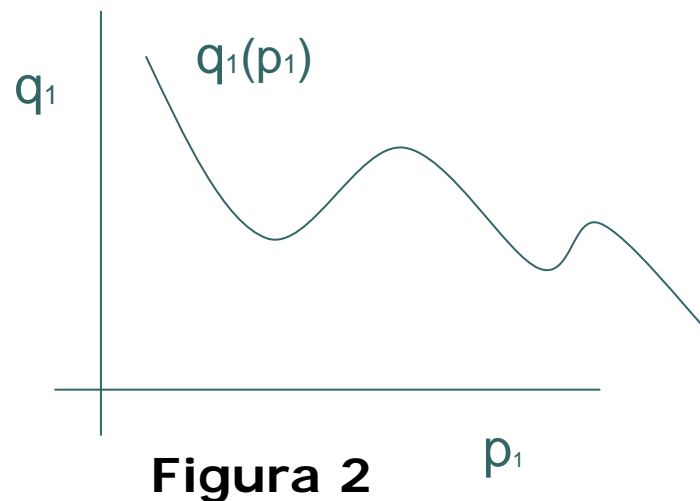
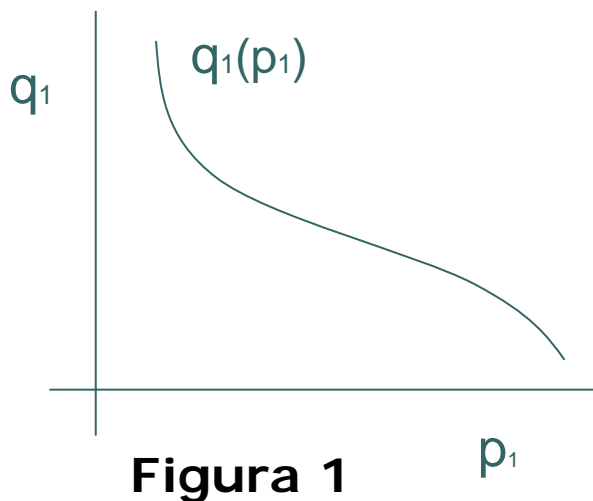


Estática comparativa (II)

1. **Cambios en el precio de un bien.** Tomemos la función de demanda $q_1(p, Y)$ y fijemos los valores de la renta y del precio del otro bien p_2 .
 - La expresión matemática resultante (una función que podemos designar como $q_1(p_1)$) nos indica cómo cambia la demanda del bien 1 cuando su precio cambia y los demás parámetros se mantienen constantes a los niveles fijados. Algo análogo podríamos hacer para el bien 2.
 - La función $q_1(p_1)$ puede representarse gráficamente en el plano p_1 - q_1 (nótese que la representación variará dependiendo de los niveles a los que se haya fijado p_2 e Y).

Estática comparativa (III)

Si la cantidad demandada depende inversamente del precio propio, como en la figura 1, el bien suele denominarse *normal* (en un alarde de imaginación 😊). [Nota: Algunos economistas usan otros nombres]



Si la cantidad demandada depende proporcionalmente del precio propio, el bien es *Giffen*, como en la figura 2 (al menos para algunos niveles de precios).

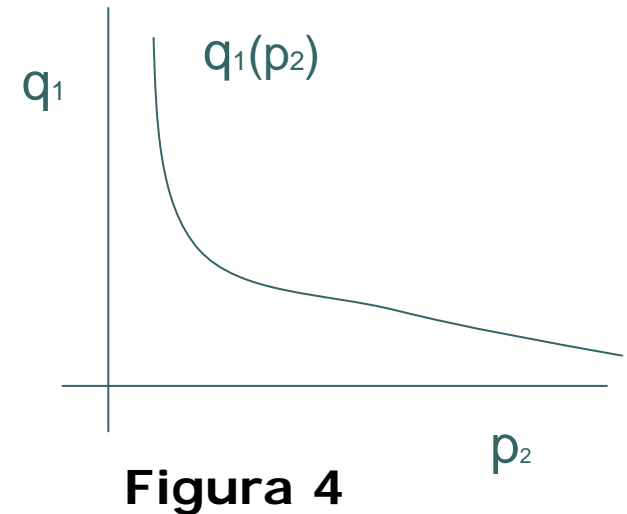
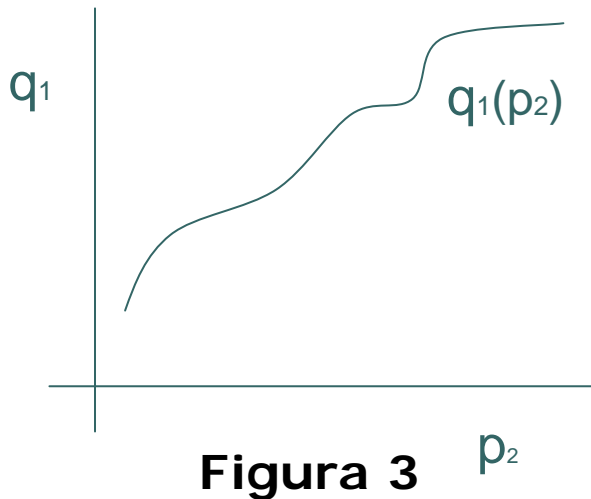


Estática comparativa (IV)

- 2. Cambios en el precio del otro bien.** Ahora fijaremos los valores de la renta y del precio propio p_1 en la función $q_1(p, Y)$.
 - La expresión matemática resultante (una función que podemos denotar $q_1(p_2)$) nos indica cómo cambia la demanda del bien 1 cuando el precio del bien 2 varía y los demás parámetros se mantienen a los niveles fijados. Algo análogo puede hacerse para el bien 2.
 - Asimismo, la función $q_1(p_2)$ puede representarse gráficamente en el plano p_2 - q_1 .

Estática comparativa (V)

Si q_1 depende proporcionalmente del precio p_2 del otro bien (figura 3), los bienes 1 y 2 son *sustitutos brutos*. Si q_1 depende inversamente del precio p_2 (figura 4), los bienes 1 y 2 son *complementarios brutos*.





Estática comparativa (VI)

- 3. Cambios en la renta.** Finalmente, fijemos los precios de los 2 bienes en la función $q_1(p, Y)$.
 - La expresión matemática resultante $q_1(Y)$ nos indica cómo cambia la demanda del bien 1 cuando la renta varía, si los precios se mantienen a los niveles fijados. Algo análogo puede hacerse para el bien 2.
 - Es muy sencillo graficar la función $q_1(Y)$ en el plano Y - q_1 .

Estática comparativa (VII)

Si la cantidad demandada depende inversamente de la renta, el bien es *inferior* (como sucede en *cierto rango* de ingresos en la figura 5).

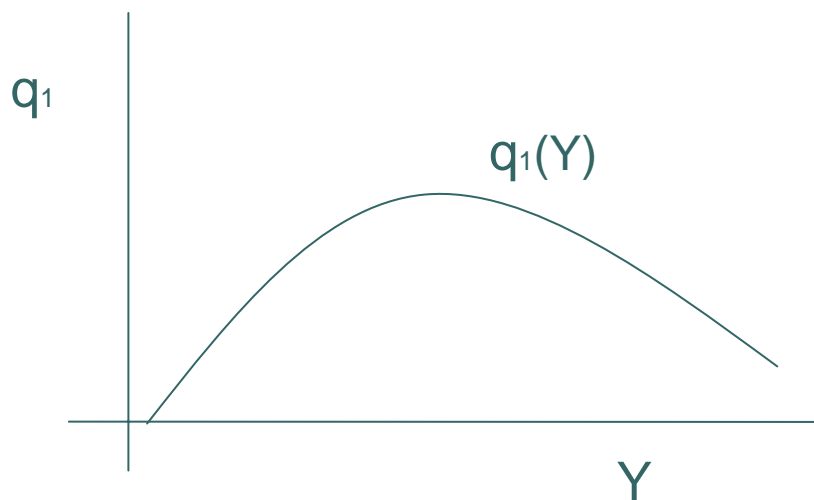


Figura 5

Estática comparativa (VIII)

Si la cantidad demandada crece con la renta, pero menos que ella, el bien es *necesario* (figura 6).

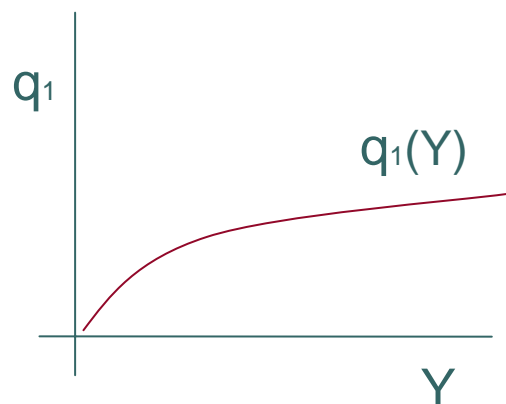


Figura 6

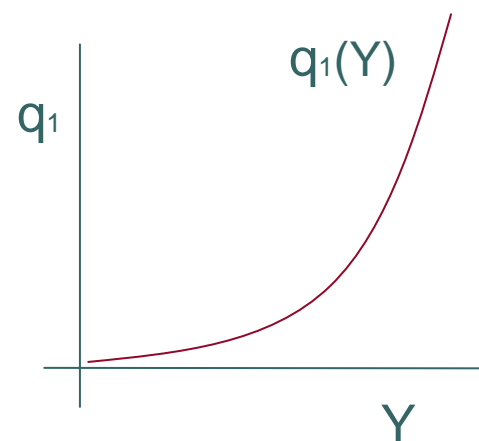


Figura 7

Si la cantidad demandada crece con la renta, pero más que ella, el bien es *de lujo* (como el de la figura 7, al menos para cierto rango de ingresos).



La 'ley de la demanda'

- **Ley de la demanda:** *Ceteris paribus*, la demanda de un bien depende **inversamente** del precio.
- Esto es, crece cuando el precio baja y decrece cuando el precio sube.
- ¿Se cumple siempre la ley de la demanda para la demanda *marshalliana*? NO, al menos desde el punto de vista teórico: Depende de las preferencias del consumidor.
- Recordemos que un bien cuya demanda *marshalliana* crece con el precio se denomina bien Giffen.
- En lo que sigue, estudiaremos qué condiciones aseguran que la demanda *marshalliana* de un bien satisfaga la ley de la demanda.



La demanda hicksiana siempre satisface la 'ley de demanda' (I)

- Empezaremos demostrando que la demanda hicksiana de cualquier bien sí depende inversamente del precio.
- Para ello, supongamos que los precios cambian de $p' = (p_1', p_2')$ a $p'' = (p_1'', p_2'')$. En tal caso,

$$p'' \cdot h(p'', U^*) \leq p'' \cdot h(p', U^*), \quad (*)$$

pues por definición $h(p'', U^*)$ minimiza el gasto de alcanzar la utilidad U^* a los precios p'' .

- Y por una razón análoga se tiene

$$p' \cdot h(p'', U^*) \geq p' \cdot h(p', U^*).$$



La demanda hicksiana siempre satisface la 'ley de demanda' (II)

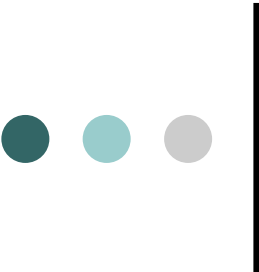
- Ahora, multiplicando por -1 ambos lados de esta última inecuación y sumando a la resultante la inecuación (*) se llega a

$$(p'' - p')[h(p'', U^*) - h(p', U^*)] \leq 0$$

- Esto se cumple para cualquier variación de precios, y en particular cuando sólo cambia el precio del bien i . En este caso se tiene que

$$(p_i'' - p_i')[h_i(p'', U^*) - h_i(p', U^*)] \leq 0$$

lo cual demuestra nuestro resultado.

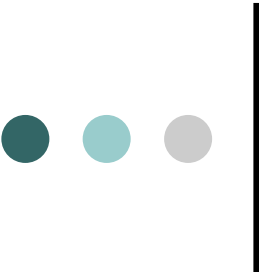


Relación entre demanda hicksiana y marshalliana (I)

- Por otro lado, puede también demostrarse lo siguiente:
 1. Para cualquier nivel de precios y de utilidad, $h(p, U^*)$ coincide con $q(p, Y)$ cuando $Y = p \cdot h(p, U^*) = e(p, U^*)$.
 2. Igualmente, y para cualquier nivel de precios y renta, $q(p, Y)$ coincide con $h(p, U^*)$ cuando $U^* = U(q(p, Y)) = v(p, Y)$.

Con lo cual obtenemos las siguientes igualdades de funciones (nótese que son vectores):

$$h(p, U^*) = q(p, e(p, U^*)) \quad y \quad q(p, Y) = h(p, v(p, Y))$$



Relación entre demanda hicksiana y marshalliana (II)

- Una interpretación posible de la primera igualdad es la siguiente: Cuando se alcanza un máximo de utilidad (dada una cierta renta y unos precios), al mismo tiempo se está gastando el mínimo posible para alcanzar ese nivel de utilidad.
- La otra igualdad tiene una interpretación en términos similares.



Lema de Shephard (I)

- Supongamos que la función de gasto es diferenciable. En tal caso, se tiene

$$\frac{\partial e(p, U^*)}{\partial p_j} = h_j(p, U^*)$$

- Para demostrarlo, considérese un vector de precios cualesquiera p' , un nivel de utilidad U^* y la demanda hicksiana correspondiente $h(p', U^*)$.
- Ahora, para cualquier vector de precios $p = (p_1, p_2)$ definimos la función $Z(p)$ como

$$Z(p) = p_1 \cdot h_1(p', U^*) + p_2 \cdot h_2(p', U^*) - e(p, U^*)$$

Lema de Shephard (II)

- El coste de $h(p', U^*)$ a los precios p será siempre mayor o igual que el gasto mínimo posible $e(p, U^*)$. Por tanto, $Z(p)$ es siempre mayor o igual que cero.
- Ahora, sabemos que es igual a cero –es decir, que alcanza un mínimo- cuando $p = p'$, porque $h(p', U^*)$ es óptima a los precios p' . Por tanto, tenemos que

$$\left. \frac{\partial Z(p)}{\partial p_j} \right|_{p=p'} = h_j(p, U^*) - \left. \frac{\partial e(p, U^*)}{\partial p_j} \right|_{p=p'} = 0$$

- Y como p' es un vector de precios cualquiera, queda demostrado el lema.



Ecuación de Slutsky (I)

- Todo lo anterior nos va a servir para demostrar un resultado fundamental.
- Para ello suponemos que tanto la demanda marshalliana como la hicksiana son diferenciables. En tal caso, podemos diferenciar con respecto al precio del bien j a ambos lados de la igualdad

$$h_i(p, U^*) = q_i(p, e(p, U^*))$$

- Nota: j puede ser igual o distinto de i .



Ecuación de Slutsky (II)

Y tenemos, por tanto:

$$\frac{\partial h_i(p, U^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial q_i[p, e(p, U^*)]}{\partial p_j} + \frac{\partial q_i[p, e(p, U^*)]}{\partial e(p, U^*)} \cdot \frac{\partial e(p, U^*)}{\partial p_j}$$



Ecuación de Slutsky (III)

Ahora, por el lema de Shephard se tiene:

$$\frac{\partial e(p, U^*)}{\partial p_j} = h_j(p, U^*)$$

Y como $h_j(p, U^*) = q_j[p, e(p, U^*)]$

Se llega a $\frac{\partial e(p, U^*)}{\partial p_j} = q_j[p, e(p, U^*)]$

Ecuación de Slutsky (IV)

- Sustituyendo, y como $Y = e(p, U^*)$ (en caso contrario, no se cumpliría la igualdad de partida) se llega a:

$$\frac{\partial h_i(p, U^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial p_j} + \frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial Y} \cdot q_j(p, Y)$$

- Y reordenando obtenemos la ecuación de Slutsky:

$$\frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p, U^*)}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial Y} \cdot q_j(p, Y)$$



Ecuación de Slutsky (V)

- Un caso especialmente interesante es cuando $i = j$. En tal caso, la ecuación de Slutsky es, obviamente:

$$\frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(p, U^*)}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial Y} \cdot q_i(p, Y)$$

- El lado izquierdo de la ecuación representa la variación de la demanda de un bien debida a un cambio en su precio.
- El lado derecho nos dice que podemos desagregar esta variación total en dos partes: El *efecto renta* y el *efecto sustitución*.



Efecto Sustitución

- En la ecuación de Slutsky, se corresponde con el término:

$$\frac{\partial h_i(p, U^*)}{\partial p_i}$$

- El efecto sustitución cuantifica la variación de la demanda al mantener constante la utilidad, y mide el efecto puro de la variación en los precios relativos (esto es, el abaratamiento o encarecimiento de un bien con respecto al otro).
- Dado que la demanda hicksiana satisface la 'ley de demanda' (como demostramos antes), el efecto sustitución es siempre opuesto a la variación del precio (y al ser una derivada, se sigue que siempre tiene signo negativo).



Efecto Renta (I)

- En la ecuación de Slutsky, se corresponde con el término:

$$-\frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial Y} \cdot q_i(p, Y)$$

- Esta expresión mide el efecto derivado del cambio en la renta *real* (cuando varían los precios, varía la capacidad adquisitiva de cada unidad monetaria).



Efecto Renta (II)

- Como el signo del efecto renta es el opuesto del de la derivada de la demanda con respecto a la renta,

$$-\frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial Y}$$

- tenemos lo siguiente:
 1. Si el bien es necesario o de lujo, la derivada es positiva, y el signo del efecto renta es por tanto negativo (es decir, opuesto a la variación del precio).
 2. Si el bien es inferior, la derivada es negativa y el efecto renta es positivo .



Efecto Total

La ecuación de Slutsky nos dice que el *efecto total* en la demanda de un bien debido a un cambio en su precio, es igual a la suma de los efectos sustitución y renta. Por tanto, y teniendo en cuenta lo que acabamos de ver:

1. Si el bien es necesario o de lujo, el efecto total es negativo. Es decir, estos bienes son normales (su demanda marshalliana satisface la *ley de demanda*).
2. Si el bien es inferior, el efecto total es positivo (o nulo) si

$$\left| \frac{\partial q_i(p, Y)}{\partial Y} \cdot q_i(p, Y) \right| \geq \left| \frac{\partial h_i(p, U^*)}{\partial p_i} \right| \quad (1)$$

y negativo en caso contrario.



Bienes Giffen

Aquellos *bienes inferiores* cuyo efecto total es positivo y por tanto su marshalliana no cumple la ley de demanda se llaman *bienes Giffen*.

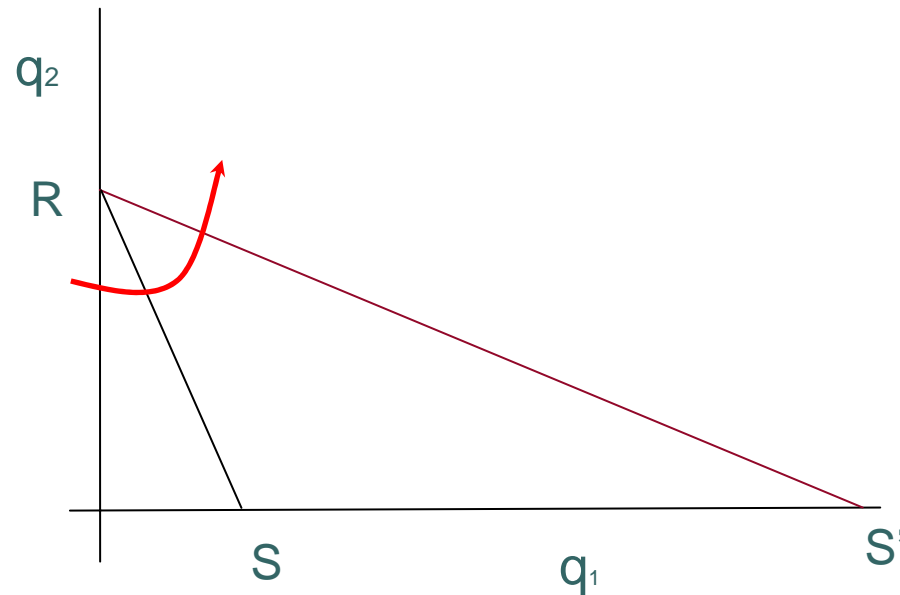
Nótese que la inecuación (1) nos dice que un bien inferior es más probable que sea Giffen si se consume mucho de él, porque en el efecto renta aparece $q_i(p, Y)$ multiplicando.

Por tanto, si hiciéramos un estudio empírico para ver qué bienes son Giffen, lo lógico sería empezar la búsqueda por aquellos bienes *inferiores* que se consuman en grandes cantidades.

Nota: Aunque la teoría reconoce que los bienes Giffen pueden existir, la inmensa mayoría de estudios empíricos (realizados en muchos países) no han encontrado ninguno. Posible excepción: Arroz y trigo en China (AER, 2009).

Efectos renta y sustitución: Análisis gráfico (I)

- Supongamos que el precio del bien 1 se reduce y que la recta de presupuesto pasa de RS a RS'.



Efectos renta y sustitución: Análisis gráfico (II)

- El efecto total (para el bien 1) lo mide la distancia horizontal entre A y B.
- Se descompone en efecto sustitución (distancia horizontal entre A y C) y efecto renta (distancia horizontal entre C y B; la diferencia de renta entre las rectas de presupuesto respectivas se denomina Compensación de Hicks).
- Nótese que el bien considerado es normal.

