Parte II: Elección en Condiciones de Incertidumbre

Tema 6: La teoría de la utilidad esperada

Incertidumbre (I)

- Incertidumbre significa que no estamos 100% seguros de las consecuencias de nuestras decisiones sobre nuestro bienestar.

- Existe incertidumbre en muchas de las decisiones que tomamos en nuestras vidas. Por ejemplo:

1. Cuando compramos un billete de lotería, no estamos seguros de si ganaremos (o perderemos).
2. Cuando compramos una acción de Telefónica, no sabemos seguro si su precio subirá (o bajará), o el dividendo que dará.
3. Si vamos de vacaciones a los trópicos, no estamos seguros de si contraeremos allí una enfermedad tropical.

Incertidumbre (II)

4. Cuando compramos un coche, no podemos saber seguro si funcionará perfectamente.
5. Cuando elegimos estudiar una carrera, es imposible conocer con seguridad cuáles serán las salidas profesionales al terminarla.
6. Si salimos a la calle, es incierto lo que nos ocurrirá.
7. Si le prestamos dinero a un conocido, no sabemos seguro si nos lo devolverá.
8. Si vamos al cine, la película puede aburrirnos o ser buena.

Incertidumbre (III)

- En este tema estudiaremos una teoría sobre cómo se comporta la gente cuando existe incertidumbre.
- Como en la parte I, la filosofía de esta teoría es la de la *elección racional* (esto es, la gente actúa racionalmente).
- Como cualquier modelo de elección racional, esta teoría empieza describiendo de forma general dos cosas:

1. El conjunto de alternativas disponibles **X**.
2. Las preferencias del individuo sobre **X**.

El conjunto de alternativas: Loterías (I)

- En todo problema de elección con incertidumbre, cada alternativa disponible recibe el nombre de **lotería**.
- Toda lotería L se compone de dos tipos de cosas:

1. C*onsecuencias* (o resultados) que pensamos que pueden ocurrir (o no) si se escoge L, denotadas como c_1, c_2, c_3, etc.
2. La *probabilidad* con la que pensamos que puede suceder cada consecuencia c_j si escogemos L, denotada como $p(c_j) \geq 0$.

Loterías (II)

- Más formalmente, y si hay N consecuencias, una lotería L se define como una lista $(p(c_1), p(c_2), p(c_3),..., p(c_N))$.

Comentarios:

- Para toda lotería L, asumiremos que las probabilidades que el individuo asigna a todas las consecuencias suman 1.
- Por tanto, toda lotería L tiene que tener *al menos* una consecuencia posible -es decir, con una probabilidad mayor que 0.
- Una lotería con sólo una consecuencia posible es un hecho seguro 100% (¿por qué?), también llamada lotería segura.

Loterías (III)

- Como ejemplos de loterías, consideremos un turista que debe decidir entre viajar a Siberia o a la selva amazónica.
- El viajero piensa que la lotería ‘viajar a Siberia’ tiene dos consecuencias posibles (probabilidades en paréntesis)

1. Pasárselo muy bien (90%).
2. Morir congelado (10%).

- Con la lotería ‘viaje al Amazonas’ pueden ocurrir 3 cosas:

1. Pasárselo muy bien (85%).
2. Morir devorado por unas pirañas (1%).
3. Contraer la malaria (14%).

Loterías (IV)

- En este ejemplo, el conjunto de todas las consecuencias es: {'pasárselo muy bien', 'morir congelado', 'morir devorado por unas pirañas', 'contraer la malaria'}
- Así que, formalmente, la lotería 'viajar a Siberia' se describe con el vector de probabilidades (0,9; 0,1; 0; 0).
- Mientras que la lotería 'viaje al Amazonas' se describe como (0,85; 0; 0,01; 0,14).
- Nótese que ambas loterías son vectores de la misma dimensión (el número total de consecuencias).

Loterías (V)

- Podemos pensar otros muchos ejemplos mas realistas y complicados. Así, las loterías disponibles para un inversor cualquiera son, entre otras:

1. Invertir todo en acciones de la empresa X (renta variable).
2. Invertir todo en acciones de la empresa Y (renta variable).
3. Invertir todo en bonos del estado (renta fija).
4. Diversificar en renta fija y variable (infinitas combinaciones).

- Y el inversor pensará que cada una de estas loterías tiene unas consecuencias y unas probabilidades asociadas.

Loterías simples y compuestas (I)

- Todas los ejemplos que hemos dado son de *loterías simples*. En muchas situaciones de la realidad, sin embargo, aparecen loterías compuestas.
- Una *lotería compuesta* es una lotería tal que alguna consecuencia es en sí misma una lotería simple.
- Ejemplo de lotería compuesta: Se tira un dado, y

1. Si sale impar, se tira después una moneda. Si sale cara ganamos 100 euros, si sale cruz no ganamos nada.
2. Si sale par, se vuelve a tirar el dado. Si sale 3 o menos, ganamos 2000. Si sale 4 o más, perdemos 1000.

Loterías simples y compuestas (II)

- Aplicando las reglas de la probabilidad, toda lotería compuesta puede reducirse a una simple equivalente.
- Así, la lotería compuesta que acabamos de mencionar es equivalente a una lotería simple con consecuencias: {'ganar 0 euros', 'ganar 100 euros', 'ganar 2000 euros', 'perder 1000 euros'}
- Y probabilidades respectivas (0,25; 0,25; 0,25; 0,25).
- Asumiremos que los individuos son capaces de aplicar correctamente las reglas de la probabilidad, de modo que están indiferentes entre una lotería compuesta y su lotería simple equivalente.

Preferencias (I)

- Sea un conjunto cualquiera de loterías y un individuo que tiene que escoger una lotería del conjunto.

- Asumiremos en lo que sigue que el individuo tiene preferencias racionales sobre el conjunto de loterías. Es decir:

1. **Completas.** Dadas dos loterías cualesquiera, el individuo puede decir si prefiere una a otra o si está indiferente entre ellas.

2. **Transitivas.** Si para tres loterías cualesquiera (1, 2, y 3) se cumple que la 1 es al menos tan buena como la 2, y la 2 al menos tan buena como la 3, entonces la 1 es al menos tan buena como la 3.

Preferencias (II)

- También asumiremos que las preferencias son **continuas**.
- Esto es, si la lotería 1 es preferida a la 2, y la lotería 3 es como la 1 pero con unas probabilidades *ligerísimamente* diferentes, entonces 3 también es preferida a 2.
- Por ejemplo, supongamos que preferimos la lotería segura ‘viaje sin problemas a Londres’ a ‘quedarnos en casa’.
- Si nuestras preferencias son continuas, la lotería ‘viaje a Londres con una probabilidad (suficientemente) pequeña de estrellarse’ también es preferida a ‘quedarnos en casa’.
- Continuidad+racionalidad nos asegura que existe una función de utilidad que representa a las preferencias.

Preferencias (III)

- Finalmente, asumiremos que las preferencias satisfacen el **axioma de independencia** (propuesto por von Neumann y Morgenstern en 1944).

- Formalmente, sean tres loterías simples L, L', L'' y un escalar β del intervalo (0,1).

- Si las preferencias satisfacen el axioma, se cumple

$$\mathrm{L} \succeq \mathrm{L}' \quad \Leftrightarrow \quad \beta \cdot \mathrm{L} + (1 - \beta) \cdot \mathrm{L}'' \succeq \beta \cdot \mathrm{L}' + (1 - \beta) \cdot \mathrm{L}'',$$

- donde $\beta \cdot \mathrm{L} + (1 - \beta) \cdot \mathrm{L}''$ es una lotería compuesta que da probabilidad β a la lotería L y (1- β) a la lotería L''.

Preferencias (IV)

- En otras palabras, si mezclamos dos loterías simples con una tercera, entonces la preferencia entre las dos loterías compuestas resultantes es *independiente* de la tercera lotería simple considerada.

- Por ejemplo, supongamos que sólo hay dos consecuencias (‘ganar 100 euros’, ‘perder 100 euros’) y que la lotería 1 con probabilidades (0,9; 0,1) es preferida a otra 2 (0,1; 0,9).

- Si las preferencias satisfacen el axioma, entonces una lotería *compuesta* donde con probabilidad 0,5 juguemos la lotería 1 y con probabilidad 0,5 juguemos otra lotería 3 (*la que sea*) es preferida a una lotería *compuesta* similar en la cual la lotería 1 se sustituye por la 2.

Función de utilidad (I)

- Como vimos, continuidad+racionalidad nos asegura que exista una función de utilidad sobre el conjunto de loterías.
- Al añadir el axioma de independencia puede demostrarse que esta función tendrá forma de **utilidad esperada.**
- Esto es, existen utilidades $u(c_1)$, $u(c_2)$, $u(c_3)$, etc, para cada una de las N consecuencias posibles (ver diapositiva siguiente para interpretación de estos valores), tal que la utilidad de la lotería simple $L = (p(c_1), p(c_2), p(c_3),..., p(c_N))$ es

$$U(L) = u(c_1)\cdot p(c_1) + \cdots + u(c_N)\cdot p(c_N)$$

Función de utilidad (II)

- Este resultado fue demostrado por von Neumann y Morgenstern, por lo cual a este tipo de función también se le llama *función de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern.*
- Nótese que la utilidad esperada de la lotería que da con *seguridad* el resultado c_i es $u(c_i)$, lo cual nos permite interpretar los números $u(c_1)$, $u(c_2)$, $u(c_3)$, etc: Son la utilidad de cada consecuencia en caso de que ocurra.

Función de utilidad (III)

- En el ejemplo del turista, las consecuencias posibles eran {'pasárselo muy bien', 'morir congelado', 'morir devorado por unas pirañas', 'contraer la malaria'}.

- Supongamos que las preferencias del turista cumplen el axioma de independencia y que la utilidad de cada consecuencia es (respectivamente): 1000, -100, -200, y 100.

- (Nota: Estos números sólo tienen significado ordinal, y *no* cardinal. Es decir, el que una consecuencia reciba 1000 de utilidad y otra 100 sólo indica que la primera es preferida a la segunda. <u>No</u> significa, en particular, que la primera sea 10 veces preferida a la segunda.)

Función de utilidad (IV)

- Dadas estas utilidades, la utilidad esperada de la lotería 'viajar a Siberia', con vector de probabilidades respectivas (0,9; 0,1; 0; 0), es

$$u(c_1)\cdot p(c_1)+\cdots+u(c_N)\cdot p(c_N)=$$
$$=1000\cdot 0{,}9-100\cdot 0{,}1-200\cdot 0+100\cdot 0=890$$

- Mientras que la lotería 'viaje al Amazonas' (0,85; 0; 0,01; 0,14) da utilidad esperada

$$1000\cdot 0{,}85-100\cdot 0-200\cdot 0{,}01+100\cdot 0{,}14=862$$

- Como la lotería 'viaje a Siberia' da mayor utilidad esperada que la lotería 'viaje al Amazonas', el turista prefiere la primera a la segunda.

Función de utilidad (V)

- Nota técnica:

- Supongamos que U(L) es una función de utilidad esperada que representa unas preferencias.

- Puede entonces demostrarse que la función

$$\overline{\mathrm{U}}(\mathrm{L}) = \beta \cdot \mathrm{U}(\mathrm{L}) + \gamma, \quad \text{donde } \beta, \gamma \text{ son escalares } (\beta > 0),$$

- también es una función de utilidad esperada que representa a esas preferencias. Más aún: No hay ningún otro tipo de función que cumpla esto.

Discusión (I)

- ¿Es realista asumir que las preferencias de los individuos tienen forma de utilidad esperada?
- O, alternativamente, ¿es realista asumir que las preferencias de los individuos son racionales, continuas, y satisfacen el axioma de independencia?
- La hipótesis de continuidad no parece demasiado irrealista.
- En cuanto al realismo de la hipótesis de racionalidad, ya lo hemos comentado en temas anteriores. Podemos añadir algo, de todos modos.

Discusión (II)

- Un problema del supuesto de racionalidad (que también vimos que existe incluso sin incertidumbre) es el del *framing* (Kahneman y Tversky, 1979).
- Como ilustración (consúltese el artículo para más detalles), imagine que usted es el especialista que debe combatir la epidemia de gripe del próximo invierno.
- La epidemia afectará a 600 personas, y todas ellas morirán si no se hace nada. Debe elegir uno de los dos programas de vacunación disponibles:

1. El primero salva 400 vidas con seguridad.
2. El segundo salva las 600 vidas con probabilidad 2/3 y ninguna con probabilidad 1/3.

Discusión (III)

- Ahora considere una situación similar. De nuevo, usted es el especialista que combatirá la epidemia de gripe del próximo invierno.
- Hay dos políticas de vacunación disponibles:

1. Si se sigue la primera, 200 personas morirán con seguridad.
2. Con la segunda, nadie morirá con probabilidad 2/3, y 600 personas morirán con probabilidad 1/3.

Discusión (IV)

- Cuando se les pregunta a profesionales, la respuesta más habitual es preferir el programa 1 en la primera situación, y el programa 2 en la segunda.
- ¡Sin embargo, las dos situaciones son idénticas!
- Lo único que cambia en cada pregunta es la descripción.
- Nótese, en particular, que las dos loterías entre las que hay que elegir en un caso u otro son las mismas.
- Esta inconsistencia va en contra de la racionalidad, que es un puntal básico en la teoría de von Neumann-Morgenstern.

Discusión (V)

- En cuanto al axioma de independencia, su realismo fue puesto en duda muy poco después de que von Neumann y Morgenstern lo introdujeran.
- La crítica más famosa es la *paradoja de Allais*, presentada por este economista francés en 1953.
- Para ilustrarla, supongamos que el conjunto de consecuencias es {'ganar 550.000 euros', 'ganar 500.000 euros', 'ganar 0 euros'}.
- Ahora nos dan a elegir entre la lotería segura A (0; 1; 0) y la lotería B (0,1; 0,89; 0,01).
- ¿Cuál preferimos?

Discusión (VI)

- Ahora, si el conjunto de consecuencias sigue siendo {‘ganar 550.000 euros’, ‘ganar 500.000 euros’, ‘ganar 0 euros’},
- pero nos dan a elegir entre la lotería C (0; 0,11; 0,89) y la lotería D (0,1; 0; 0,9). ¿Cuál preferimos?
- Cuando se hacen encuestas de este tipo, la respuesta más habitual a cada pregunta es (respectivamente)

$$A \succ B \qquad \text{y} \qquad D \succ C$$

- Pues bien, estas preferencias violan el axioma de independencia.

Discusión (VII)

- En efecto, sean $u(5.5)$, $u(5)$, y $u(0)$ las utilidades respectivas de cada consecuencia.
- Si la función de utilidad tiene forma de utilidad esperada y la lotería A es preferida a la B entonces debe cumplirse

$$u(5) > 0{,}1 \cdot u(5.5) + 0{,}89 \cdot u(5) + 0{,}01 \cdot u(0)$$

- Ahora, si añadimos $0{,}89 \cdot u(0) - 0{,}89 \cdot u(5)$ a cada lado de esta desigualdad se llega a

$$0{,}11 \cdot u(5) + 0{,}89 \cdot u(0) > 0{,}1 \cdot u(5.5) + 0{,}9 \cdot u(0)$$

- En otras palabras: La utilidad esperada de la lotería C debería ser mayor que la de D. Por tanto, los individuos que prefieren D a C incumplen el axioma de independencia.

Discusión (VIII)

- La paradoja de Allais parece indicar que mucha gente no cumple el axioma de independencia cuando alguna probabilidad está cercana a 0 o a 1.

- En respuesta a esta paradoja (y a otras que no tenemos tiempo de considerar aquí) han surgido teorías alternativas a la de la utilidad esperada, que tratan de explicar mejor la evidencia experimental disponible.