



Parte II: Elección en Condiciones de Incertidumbre

Tema 7: Análisis del Riesgo



Un tipo particular de loterías (I)

- En este tema mantenemos los supuestos del tema anterior (con lo cual, la función de utilidad tiene forma de utilidad esperada).
- Pero estudiaremos un caso particular: Las consecuencias de *toda* lotería son niveles de riqueza monetaria.
- Un ejemplo de tal lotería es la siguiente, con 3 consecuencias (probabilidades respectivas en paréntesis):
 1. 'Mi riqueza es de 100 euros' (45%)
 2. 'Mi riqueza es de 1000 euros' (15%)
 3. 'Mi riqueza es de 0 euros' (40%)



Un tipo particular de loterías (II)

- Otro ejemplo, ahora con 4 consecuencias posibles:
 1. '100 euros' (20%)
 2. '8.000 euros' (20%)
 3. '0 euros' (40%)
 4. '10.000 euros' (20%)



Función de utilidad del dinero (I)

- Recordemos que la utilidad esperada $U(L)$ de cualquier lotería L es

$$U(L) = u(c_1) \cdot p(c_1) + \cdots + u(c_N) \cdot p(c_N)$$

- Donde $u(c_i)$ representa la utilidad de la consecuencia c_i .
- Para modelar esta idea en nuestro contexto, asumiremos que existe una función de utilidad de la riqueza (o el dinero)

$$u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

- Que es creciente (es decir, el dinero da utilidad), continua, y acotada.



Función de utilidad del dinero (II)

- El que esta función esté acotada significa que no toma valor ∞ ni $-\infty$ en ningún punto.
- Para justificar este supuesto, mostraremos lo que pasaría en caso contrario, con la llamada 'Paradoja de Bernouilli' (o 'paradoja de San Petersburgo').
- Suponemos un individuo con función de utilidad del dinero no acotada por arriba y una lotería compuesta donde se tira una moneda repetidamente hasta que aparezca cara.
- La riqueza final si la cara sale en la m -ésima ronda será una cantidad x_m suficientemente grande que cumpla:

$$u(x_m) > 2^m$$

Función de utilidad del dinero (III)

- [Nota: esta cantidad de dinero siempre existe por muy grande que sea m , pues la función u no está acotada.]
- Aplicando reglas básicas, se demuestra que la probabilidad de que la primera cara salga en la m -ésima ronda es

$$\frac{1}{2^m}$$

- Y por tanto, la utilidad esperada de esta lotería sería

$$\sum_{m=1}^{\infty} u(x_m) \cdot \frac{1}{2^m} \geq \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m} = \infty$$

- Es decir, este individuo estaría dispuesto a pagar cualquier cantidad de dinero para jugar esta lotería, lo cual no parece realista (¿cuánto estaría dispuesto a pagar usted?).



Aversión al Riesgo (I)

- Dos conceptos cruciales en este contexto son los de riesgo y aversión al riesgo. Definiremos el segundo en lo que sigue.
- Para ello, introduzcamos algo de notación.
 1. $L(x)$ denota la *lotería segura* 'mi riqueza es de x euros'.
 2. Dada una lotería L con consecuencias monetarias x_1, x_2, \dots, x_N y probabilidades respectivas p_1, p_2, \dots, p_N , denotamos como $E(L)$ el valor esperado de L , esto es

$$E(L) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i)$$

- ¡No confundamos $E(L)$ con la utilidad esperada $U(L)$!



Aversión al Riesgo (II)

- Decimos que un individuo es (estrictamente) *averso al riesgo* si prefiere la lotería que da una riqueza $E(L)$ con 100% de seguridad a jugar la propia lotería L . En otras palabras,

$$L[E(L)] \succ L \quad \forall L$$

- Un individuo es (estrictamente) *amante del riesgo* si se cumple lo contrario, esto es,

$$L \succ L[E(L)] \quad \forall L$$

- Finalmente, un individuo es *neutral al riesgo* si está indiferente entre las dos loterías mencionadas

$$L[E(L)] \approx L \quad \forall L$$

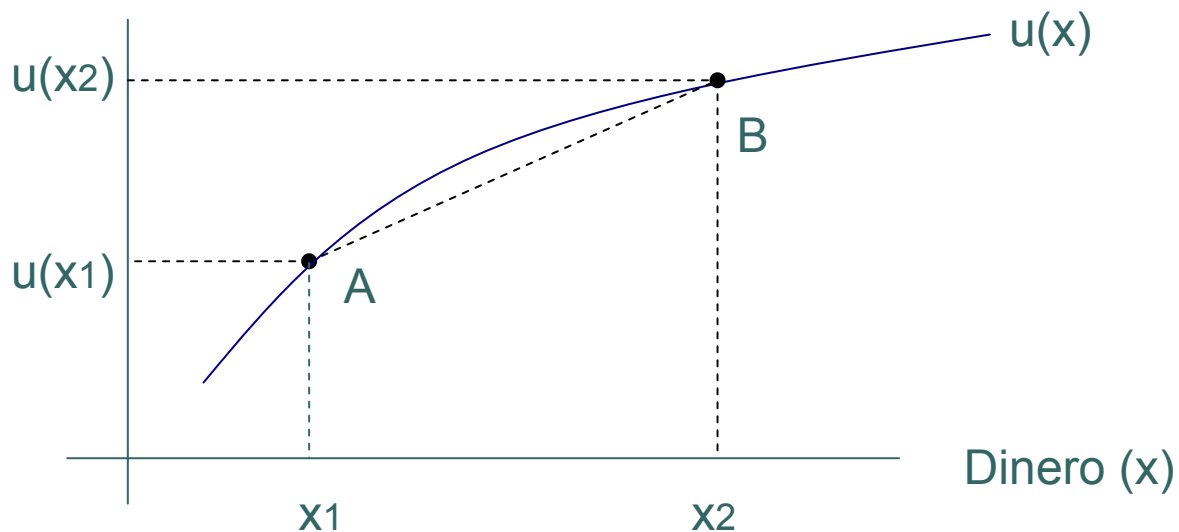


Aversión al Riesgo (III)

- Pues bien, puede demostrarse que la *función de utilidad del dinero* de un individuo averso al riesgo es cóncava; la de un amante del riesgo, convexa; y la de un agente neutral, lineal.
- En otras palabras, la utilidad marginal del dinero para un individuo
 1. averso al riesgo, es decreciente.
 2. amante del riesgo, es creciente.
 3. neutral al riesgo, es constante.

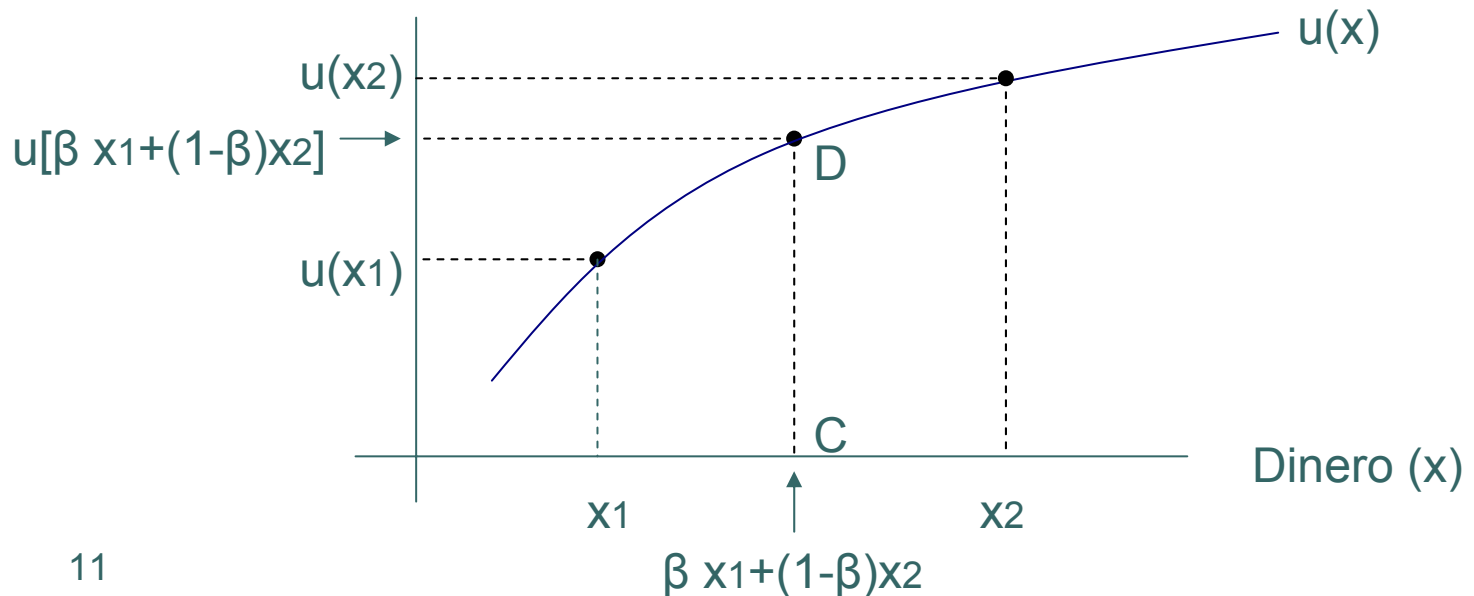
Aversión al Riesgo (IV)

- Podemos ver esto gráficamente. En la figura aparece la función de utilidad del dinero de un agente averso al riesgo.
- Consideremos dos cantidades cualquiera de dinero, x_1 ; x_2 . Utilizando la función (o la curva) $u(x)$ podemos hallar la utilidad de tener cada uno de esos niveles de riqueza.



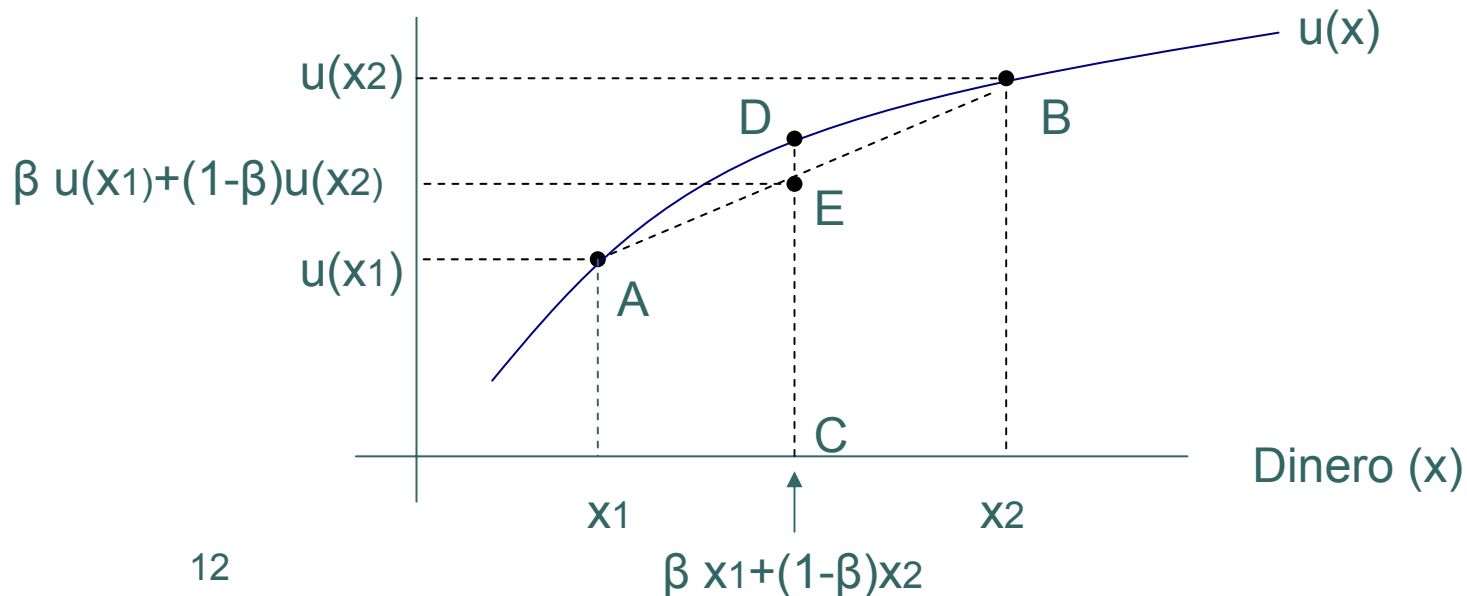
Aversión al Riesgo (V)

- Ahora consideremos una lotería L' con la que se tiene una riqueza x_1 con probabilidad β y x_2 con probabilidad $(1-\beta)$, donde β es un número entre 0 y 1.
- El valor esperado $E(L')$ de L' es $x_1\beta+x_2(1-\beta)$, y la utilidad de tener seguro un nivel de riqueza $E(L')$ es igual a la altura CD.



Aversión al Riesgo (VI)

- Ahora, puede demostrarse que la *utilidad esperada* de la lotería L' es igual a la altura CE (en la intersección con la recta AB).
- Puede verse que $CE < CD$, lo cual muestra que este individuo es averso al riesgo, como queríamos mostrar.



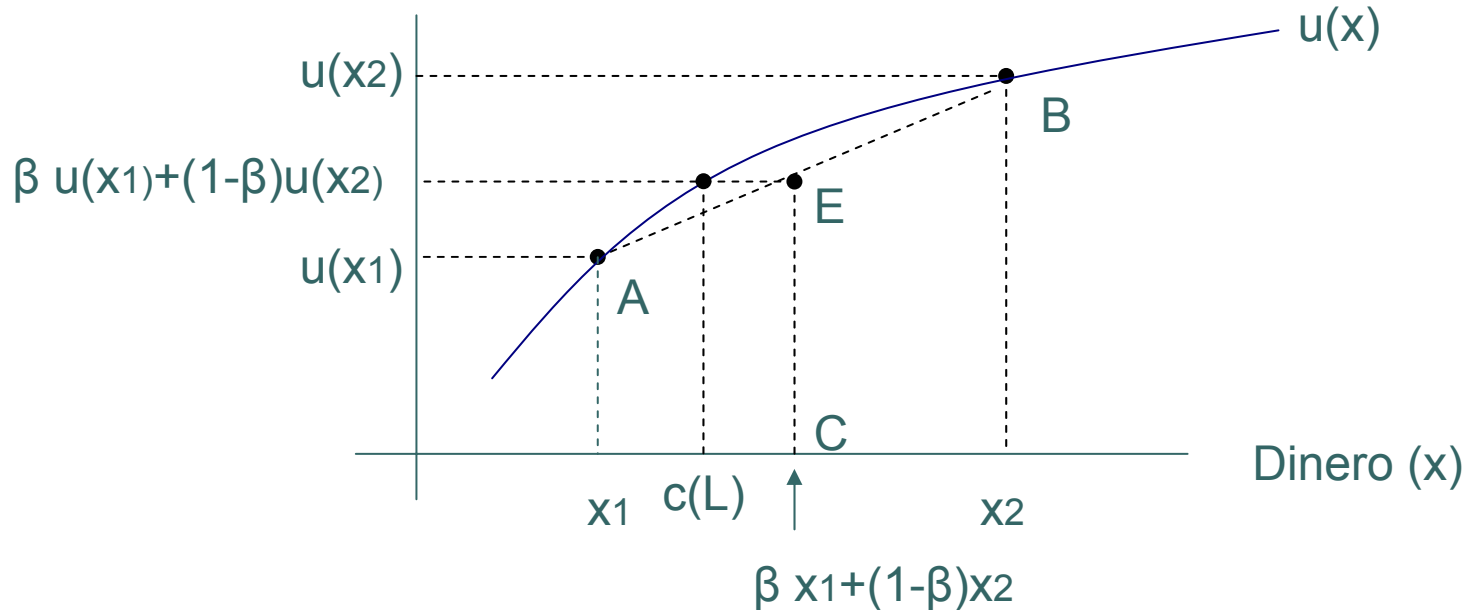


Aversión al Riesgo (VII)

- Un análisis gráfico análogo puede hacerse para el caso de un individuo amante del riesgo o neutral al riesgo (hacer).
- Otro concepto importante en este contexto es el de equivalente cierto de una lotería L , $c(L)$.
- Es aquel nivel de riqueza tal que el agente está indiferente entre jugar L o tener $c(L)$ seguro. Puede demostrarse que [Nota: $E(L)$ es el valor esperado de L]:
 1. $c(L) < E(L)$ si el agente es averso al riesgo;
 2. $c(L) = E(L)$ si el agente es neutral; y
 3. $c(L) > E(L)$ si el agente es amante del riesgo.

Aversión al Riesgo (VIII)

- Podemos representar fácilmente $c(L)$ si la lotería L sólo tiene dos consecuencias posibles x_1, x_2 .
- En la figura aparece el caso de un agente averso al riesgo.





Aplicación: Seguros (I)

- Sea un individuo con función de utilidad del dinero $u(x)$, donde x representa el *nivel de riqueza* del individuo.
- Supongamos que $u(x)$ es estrictamente cóncava, es decir, que el individuo es estrictamente averso al riesgo.
- El individuo posee inicialmente una riqueza de x_0 euros, pero hay una probabilidad p de que pierda D euros (y una probabilidad $(1-p)$ de que se quede como está).
- Podemos pensar distintas razones por las que puede ocurrir la pérdida: Fuego, inundaciones, robo, pérdida de trabajo, accidente, atentado terrorista, etc.
- Sin embargo, el individuo puede asegurarse.

Aplicación: Seguros (II)

- Básicamente, un seguro es una cantidad de dinero (*prima*) que se paga para recibir otra cantidad de dinero *en caso* de pérdida.
- Supongamos que la empresa aseguradora ofrece 1 euro por cada q euros de prima.
- Es decir, la empresa paga K euros (en caso de pérdida) si el asegurado paga una prima de Kq .

- En este caso, la riqueza final del individuo si ocurre la pérdida es

$$x_0 - Kq - D + K$$

- Y si no ocurre la pérdida, la riqueza final será

$$x_0 - Kq$$

Aplicación: Seguros (III)

- ¿Cuál será la prima Kq que pagará el individuo?
- O, en otras palabras, ¿qué nivel de seguro K comprará?
- Aquél que maximice su utilidad esperada, esto es,

$$\max_{K \geq 0} (1 - p) \cdot u(x_0 - Kq) + p \cdot u(x_0 + K(1 - q) - D)$$

- Resolvemos por Kuhn-Tucker. La función lagrangiana es:

$$(1 - p) \cdot u(x_0 - Kq) + p \cdot u(x_0 + K(1 - q) - D) + \lambda \cdot K$$



Aplicación: Seguros (IV)

- Y, por tanto, las condiciones necesarias de óptimo son:

$$-q \cdot (1-p) \cdot u'(x_0 - Kq) + (1-q) \cdot p \cdot u'(x_0 + K(1-q) - D) + \lambda = 0$$

$$\lambda \geq 0$$

$$K \cdot \lambda = 0$$



Aplicación: Seguros (V)

- Para simplificar el análisis, consideremos el caso particular en que el precio de 1 euro de indemnización es 'actuarialmente justo', o sea, $q=p$ (en este caso, los beneficios esperados de la aseguradora son 0).
- Entonces las condiciones necesarias se reescriben como

$$(1-q) \cdot q \cdot [u'(x_0 + K(1-q) - D) - u'(x_0 - Kq)] = -\lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

$$K \cdot \lambda = 0$$

Aplicación: Seguros (VI)

- ¿Puede ser $K=0$ óptimo en este caso? Es decir, ¿puede ser óptimo no asegurarse nada?
- Si fuera así, la primera ecuación del sistema quedaría como

$$(1-q) \cdot q \cdot [u'(x_0 - D) - u'(x_0)] = -\lambda$$

- Pero esto no es posible: Al ser la función u estrictamente cóncava, debe cumplirse siempre que (si $D > 0$)

$$u'(x_0 - D) > u'(x_0).$$

- Y dado que además λ es mayor o igual que 0, tenemos una imposibilidad matemática.

Aplicación: Seguros (VII)

- En el óptimo, por tanto, $K > 0$. Pero en ese caso, la condición de holgura complementaria implica $\lambda = 0$.
- Por tanto, la primera ecuación del sistema queda como

$$(1-q) \cdot q \cdot [u'(x_0 + K(1-q) - D) - u'(x_0 - Kq)] = 0$$

$$\Rightarrow u'(x_0 + K(1-q) - D) = u'(x_0 - Kq)$$

- Y como la función u es estrictamente cóncava, se llega a

$$\Rightarrow x_0 + K(1-q) - D = x_0 - Kq \Rightarrow K = D$$



Aplicación: Seguros (VIII)

- Hemos demostrado, en definitiva, que si el precio es 'actuarialmente justo', el individuo se asegurará totalmente (esto es, contratará un seguro que cubra toda la pérdida).
- Otros casos (para un amante del riesgo, por ejemplo) podrían analizarse de un modo similar (hacer en casa).
- Nota: Estas son condiciones necesarias, pero se puede demostrar que también son suficientes (porque la función objetivo es estrictamente cóncava).