Parte III: Teoría de Juegos

Tema 8: Juegos estáticos o de decisión simultánea.

¿Qué es un juego? (I)

- Un juego es una interacción entre dos o más personas.
- Es decir, una situación en la que el bienestar o utilidad de cada una de ellas depende no sólo de la decisión propia, sino también de la de los demás.
- Podemos pensar multitud de ejemplos de la vida real:

1. Duopolio: El beneficio de Airbus depende del precio fijado para sus aviones, pero también del precio fijado por Boeing para sus aviones de gama similar (si Airbus es más cara que Boeing, venderá menos aviones).

¿Qué es un juego? (II)

2. Subastas: Si un gobierno vende en subasta pública una compañía de telecomunicaciones y Telefónica puja por ella, Telefónica la comprará sólo si su puja es mayor que la del resto de compañías participantes en la subasta.
3. Negociación: Cuando obreros y empresarios negocian sobre salarios, el resultado final no sólo depende de lo que pidan los obreros, sino también de lo que los empresarios estén dispuestos a conceder.
4. Medio ambiente: El calentamiento global no sólo depende de las emisiones de España, sino también de las del resto de países.

¿Qué es un juego? (III)

5. Organización de equipos: Cuando un grupo de gente tiene un objetivo común (por ejemplo, fabricar un producto), necesitan coordinarse para lograrlo.
6. Política: El número de votos que saca el partido X depende no sólo del programa que presenta, sino también del que presenten los otros partidos.
7. Guerra: El que un ejército gane una guerra no sólo depende de su estrategia, sino también de la del ejército enemigo.
8. Ajedrez (y cualquier juego de mesa): Ganar depende de lo que hagan uno y otro jugador.

Teoría de Juegos cooperativa y no-cooperativa

- Una vez definido lo que es un juego, ¿qué es la Teoría de Juegos? Debemos mencionar primero que ésta se divide en 2 ramas:

1. Cooperativa.
2. No-cooperativa.

- La distinción entre cada rama es algo borrosa, pero la idea básica es que en la Teoría de Juegos no-cooperativa la unidad de análisis es el *individuo*, y en la cooperativa lo es el *grupo*.

- *Sólo* consideraremos la Teoría de Juegos *no-cooperativa*, definida como el estudio del comportamiento de los participantes en un juego.

Juegos estáticos: Definición.

- Comenzaremos analizando los juegos más sencillos posibles: Los *juegos estáticos o de decisión simultánea*.
- Se caracterizan por dos cosas:

1. Cada individuo no toma más de una decisión a lo largo del juego.
2. Todos los individuos toman sus decisiones simultáneamente.

- Esto último significa que cada uno decide sin saber lo que han decidido los demás (no necesariamente al mismo tiempo).

Juegos estáticos: Ejemplos

- ‘Piedra, papel o tijera’ es un ejemplo de un juego estático.
- ‘Pares o nones’ es otro ejemplo.
- O pensemos en la decisión de utilizar transporte público o privado que (algunos) realizamos todas las mañanas.
- Esto es un juego, porque el bienestar derivado de elegir una cosa u otra depende de lo que elijan los demás: (1) Si mucha gente coge el coche, habrá atascos, (2) si mucha gente coge el autobús o el metro, estarán abarrotados.
- Y es simultáneo porque cada persona no toma más de una decisión, y la toma sin saber lo que harán los demás.

Juegos estáticos: Descripción.

- Supongamos que queremos predecir el comportamiento de los participantes en un juego estático. ¿Qué información necesitamos?

- La Teoría de Juegos afirma que, *para este tipo de juegos*, la siguiente información es suficiente:

1. Los participantes en el juego, o *jugadores*: $i \in \{1,\dots,n\}$.
2. Las *estrategias* (es decir, las alternativas) que cada jugador puede elegir.
3. La *utilidad (o pago)* que cada jugador obtiene para cada posible vector de estrategias de los jugadores.

- Toda esta información se denomina descripción del juego en *forma estratégica*.

Estrategias y pagos: Notación

- El conjunto de estrategias disponibles del jugador i se denota como S_i , y una estrategia cualquiera de i como s_i .
- Asimismo, y si el número de jugadores es n, un listado o vector de estrategias se denotará como $s = (s_1, \ldots, s_n)$.
- Finalmente, la utilidad (o *pago*) que el jugador i obtiene si los jugadores actúan de acuerdo a $s = (s_1, \ldots, s_n)$ se denota

$$u_i(s) = u_i(s_1, \ldots, s_n).$$

- Dados dos vectores $s = (s_1, \ldots, s_n)$ y $s' = (s'_1, \ldots, s'_n)$,

$$u_i(s) > u_i(s')$$

significa que i prefiere que los jugadores actúen según s que según s'.

Matriz de pagos (I)

- Si el juego sólo tiene 2 jugadores, podemos representar la información de la forma estratégica con una *matriz de pagos*.
- Cada columna de esta matriz se corresponde con una estrategia de un jugador, y cada fila con una estrategia del otro jugador.
- Cada celda, por tanto, se corresponde con un vector de estrategias $s = (s_1, s_2)$.
- Pues bien, en la celda correspondiente al vector s aparecen los pagos que obtendría cada jugador si se jugara de acuerdo con ese vector de estrategias, esto es

$$u_1(s), u_2(s)$$

Matriz de pagos (II)

- Como ejemplo, pensemos en ‘piedra, papel o tijera’. ¿Cómo sería su matriz de pagos?
- Supongamos que todo jugador prefiere ganar a empatar, y empatar a perder. En tal caso, unos posibles pagos que representan esto son los siguientes:

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1, -1
Papel	1, -1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1, -1	0,0

El Dilema del Prisionero (I)

- Tal vez el juego más famoso de todos es el ‘*dilema del prisionero*’.

- Es un juego estático con dos jugadores. Cada jugador debe escoger entre dos estrategias (normalmente llamadas ‘cooperar’ y ‘no cooperar’), y los pagos son:

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	c, c	t, d
No cooperar	d, t	m, m

- Donde se cumple $d>c>m>t$, y $2c>d+t$. [Nota: Normalmente se conviene $t=0$, pero no es estrictamente necesario]

El Dilema del Prisionero (II)

- Un ejemplo particular de dilema del prisionero es el siguiente (para c=4, m=1, t=0 y d=6):

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	4,4	0,6
No cooperar	6,0	1,1

El Dilema del Prisionero (III)

- El dilema del prisionero es importante porque representa un tipo de interacción muy frecuente, caracterizada por lo siguiente:

1. Existe un comportamiento que genera una <u>externalidad positiva sobre los demás</u> (es lo que llamamos cooperar).
2. Actuar de ese modo tiene un coste en bienestar para cada jugador.
3. No obstante, el coste individual de cooperar es menor que el beneficio agregado de cooperar.

- En definitiva, se trata de una situación donde el interés individual y el de un colectivo están en conflicto

El Dilema del Prisionero (IV)

1. Como ilustración, considere dos empresas que venden un mismo bien (Airbus y Boeing) y buscan maximizar beneficios.

- Suponga que cada empresa puede elegir entre precios de venta bajos o altos, y que sus beneficios son los siguientes:
- Si ambas ponen precios altos, los beneficios de ambas son 4.
- Si una empresa pone precios bajos y la otra no, la primera le quita los clientes a la segunda y obtiene 7 de beneficio. La segunda, por lo contrario, obtiene beneficios 0.
- Finalmente, suponemos que los ingresos bajan si las dos ponen precios bajos, con lo cual los beneficios de ambas son sólo de 2.
- Esta situación es un dilema del prisionero para las empresas.

El Dilema del Prisionero (V)

2. Otro posible ejemplo de una situación tipo dilema del prisionero (DP) es cuando dos países comercian entre sí.

- Supongamos que al gobierno de cada país sólo le importe maximizar el empleo en su país.
- Cada gobierno puede elegir una política comercial proteccionista (‘no cooperar’) o liberal (‘cooperar’). Tenemos un DP si suponemos que:
- Si un país es proteccionista y el otro no, el primero sale ganando con respecto a la situación en que ambos eran liberales (y el segundo sale perdiendo).
- Si los dos países son proteccionistas, ambos están peor que si los dos fueran liberales.

El Dilema del Prisionero (VI)

3. Finalmente, consideremos dos grandes países que tienen que decidir si firman un protocolo para controlar las emisiones de CO2 (Kyoto).

- Supongamos de nuevo que a cada gobierno sólo le importa el nivel de empleo en su país durante su mandato y que:

- Si los dos países firman (o no firman), la competitividad de las empresas de cada país es idéntica.

- Sin embargo, si un país firma y el otro no, las industrias del primero pierden competitividad (porque tienen que gastar dinero para reducir las emisiones), mientras que las del segundo la ganan.

La Batalla de los Sexos

- Otro juego estático de 2 jugadores que es famoso es 'La Batalla de los Sexos'.

- Se corresponde con la siguiente matriz de pagos ($a>b>0$)

	A	B
A	a,b	0,0
B	0, 0	b,a

- Por ejemplo, si $a=5$, y $b=4$, tenemos la matriz:

	A	B
A	5,4	0,0
B	0, 0	4,5

Hipótesis sobre los jugadores (I)

- El principal objetivo de la Teoría de Juegos es explicar y predecir el comportamiento de los jugadores.
- Antes de responder a esta cuestión, no obstante, vamos a hacer una serie de hipótesis sobre ellos:

1. Todos ellos son racionales (es decir, tienen preferencias racionales).
2. Todos ellos saben que todos son racionales.
3. Todos ellos saben que todos ellos saben que todos son racionales.
4. Y así indefinidamente...

Hipótesis sobre los jugadores (II)

- En la jerga técnica, todas las hipótesis anteriores se resumen del siguiente modo: La racionalidad de los jugadores es de *conocimiento público* (o de dominio público).
- No sólo asumiremos que la racionalidad de los jugadores es de conocimiento público, sino que también lo es la información contenida en la forma estratégica (jugadores, estrategias y pagos).
- Estas hipótesis son muy fuertes (y probablemente muy poco realistas), pero simplifican enormemente el análisis.
- En cursos avanzados se estudia cómo relajarlas.

Estrategias estrictamente dominadas (I)

- Pasemos entonces a considerar cómo jugarán los jugadores.
- El primer concepto que estudiaremos en este sentido es el de *estrategia estrictamente dominada*.
- Podemos utilizarlo para predecir qué estrategias <u>no</u> se jugarán si la racionalidad es de conocimiento público.
- A veces, esta información sirve para determinar (por eliminación) qué estrategias <u>sí</u> se jugarán

Estrategias estrictamente dominadas (II)

- En un juego en forma estratégica, sean s'_i y s''_i dos estrategias del jugador i. Asimismo, s_{-i} denotará cualquier vector de estrategias de los jugadores *distintos* de i (una para cada uno).

- **Definición**: s'_i está estrictamente dominada por s''_i si *para todo* vector s_{-i} se tiene

$$u_i(s''_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

- Donde (s'_i, s_{-i}) denota el vector de estrategias en el que i juega s'_i y los demás jugadores de acuerdo a s_{-i}.

Estrategias estrictamente dominadas (III)

- En otras palabras, una estrategia de i está estrictamente dominada por otra si, *hagan lo que hagan los otros jugadores*, la segunda siempre da un mayor pago que la primera.

- En el 'dilema del prisionero', por ejemplo, 'cooperar' está estrictamente dominada por 'no cooperar' para ambos jugadores. Esto se sigue de la condición $d>c>m>t$.

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	c, c	t, d
No cooperar	d, t	m, m

Estrategias estrictamente dominadas (IV)

- Un jugador racional nunca jugará una estrategia estrictamente dominada, porque nunca puede ser óptima.
- En el dilema del prisionero, esto implica que ningún jugador *racional* elegirá la estrategia 'cooperar'. Y dado que sólo hay dos estrategias, esto implica a su vez que los dos jugadores elegirán 'no cooperar'.
- En este juego, por tanto, podemos predecir con exactitud lo que ocurrirá simplemente recurriendo al concepto de estrategia estrictamente dominada.
- ¿Ocurre esto en otros juegos? A veces sí, pero muchas otras veces no.

Estrategias estrictamente dominadas (V)

- Veamos otro ejemplo donde sí ocurre, aunque de una manera mucho menos directa:

	A1	A2	A3
B1	1,0	1,2	0, 1
B2	0, 3	0,1	2,0

- Claramente, la estrategia A3 del jugador-columna está dominada por la estrategia A2. Si este jugador es racional, por tanto, nunca jugará A3.

Estrategias estrictamente dominadas (VI)

- Ahora, hemos asumido que cualquier jugador *sabe* que los demás jugadores son racionales (pues la racionalidad de los jugadores es de conocimiento público).
- Por consiguiente, el jugador-fila será capaz de deducir que el jugador-columna nunca jugará A3.
- Pero si esto es así, los únicos resultados posibles son:

	A1	A2
B1	1,0	1,2
~~B2~~	~~0, 3~~	~~0,1~~

- Y en esta situación, la estrategia B2 está estrictamente dominada por la B1.

Estrategias estrictamente dominadas (VII)

- Por tanto, el jugador-fila no jugará B2.
- Ahora, hemos asumido asimismo que todo jugador *sabe que todos saben* que todos son racionales.
- En consecuencia, el jugador-columna será capaz de deducir que el jugador fila no jugará B2.

	A1	A2
B1	1,0	1,2

- Con lo cual lo mejor para el jugador-columna es jugar A2.
- Hemos llegado a una única predicción (B1, A2) usando lo que se denomina *eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas*.

Estrategias estrictamente dominadas (VIII)

- Sin embargo, existen infinidad de juegos en los que no podemos hallar una *única* predicción usando argumentos de dominación.

- En efecto, frecuentemente no existe ninguna estrategia dominada (como en la 'batalla de los sexos' de la izquierda), o éstas son 'insuficientes' para llegar a una única predicción (juego de la derecha).

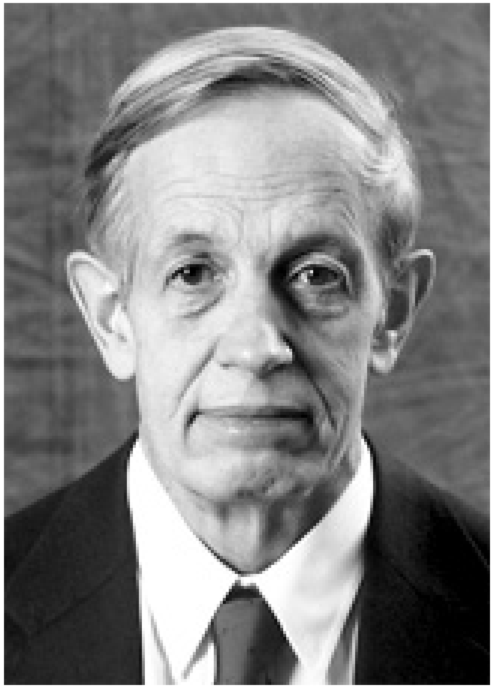
	A	B
A	a,b	0,0
B	0, 0	b,a

	A1	A2	A3
B1	1,0	1,2	0, 1
B2	2, 3	0,1	2,0

Equilibrio de Nash (I)

- En estos casos, tenemos que recurrir a otros conceptos para predecir el comportamiento de los jugadores.

- Una posibilidad es utilizar el concepto de *Equilibrio de Nash* (por John F. Nash, quien lo formalizó en 1950).



Equilibrio de Nash (II)

- Consideremos un juego cualquiera en forma estratégica.
- Asimismo, sea (s_i^*, s_{-i}^*) un vector cualquiera de estrategias de los jugadores (una para cada uno).
- **Definición**: El vector (s_i^*, s_{-i}^*) es un equilibrio de Nash si, *para todo jugador* i, s_i^* es una mejor respuesta a las estrategias de los otros jugadores, s_{-i}^*. Es decir:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

para toda posible estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i.

Equilibrio de Nash (III)

- En otras palabras, un equilibrio de Nash es un vector de estrategias tal que, *si todos los jugadores actuasen de acuerdo a él* (y supiesen esto), entonces *ninguno* tendría incentivos para actuar de otro modo.
- En la mayoría del análisis de Teoría de Juegos, se suele asumir que los jugadores de cualquier juego siempre actuarán según un equilibrio de Nash de éste.
- Como la justificación de esta hipótesis es compleja, no la estudiaremos aquí.
- Debe advertirse, no obstante, que es un supuesto algo polémico y que su validez empírica está sujeta a debate.

Equilibrio de Nash: Propiedades (I)

- Ilustraremos el concepto y algunas de sus propiedades con varios ejemplos.
- Empecemos con el dilema del prisionero. ¿Qué vectores de estrategias son equilibrios de Nash?

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	4, 4	0, 6
No cooperar	6, 0	2, 2

- Si lo pensamos un poco, veremos que en este juego sólo existe un equilibrio de Nash: (No cooperar, no cooperar).

Equilibrio de Nash: Propiedades (II)

- En general, y si tenemos una matriz de pagos, podemos hallar los equilibrios aplicando la siguiente 'reglita' *a todas las celdas de la matriz*:
- **Regla**: Si el primer pago de una celda es el máximo de su columna, y el segundo pago es el máximo de su fila, entonces el vector de estrategias correspondiente es un equilibrio
- (Nota: asumiendo que el primer pago de cada celda es el del jugador fila).

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	4, 4	0, 6
No cooperar	6, 0	2, 2

Equilibrio de Nash: Propiedades (III)

- El análisis del dilema del prisionero nos permite relacionar los conceptos de equilibrio de Nash y estrategia estrictamente dominada.

- En efecto, obsérvese que la estrategia estrictamente dominada ‘cooperar’ no forma parte del único equilibrio de Nash de este juego.

- ¿Es esto generalizable? Es decir, ¿es cierto que una estrategia estrictamente dominada nunca puede ser parte de un equilibrio de Nash de un juego?

- La respuesta es sí, sea cual sea el juego considerado. Más aún, puede probarse que si una estrategia no sobrevive a la eliminación iterada de estrategias, entonces no puede formar parte de un equilibrio.

Equilibrio de Nash: Propiedades (IV)

- Consideremos ahora la Batalla de los Sexos. ¿Cuál es el (o los) equilibrio de Nash?

	A	B
A	9,1	0,0
B	0, 0	1,9

- Obviamente, tanto (A, A) como (B, B) son equilibrios. Es decir: <u>No siempre existe un único equilibrio</u>.

- ¿Qué predice la teoría cuando hay múltiple equilibrios? A veces se utiliza el concepto de *punto focal* (Schelling, 1960) para resolver este tipo de problemas (ver apuntes de clase).

Equilibrio de Nash: Propiedades (V)

- Finalmente, ¿cuáles son los equilibrios de Nash en 'Piedra, papel, tijera'?

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1, -1
Papel	1, -1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1, -1	0,0

- ¡No hay ninguno! --> <u>No siempre existe un equilibrio</u>.
- Para resolver este problema, los teóricos inventaron el concepto de *estrategias mixtas*, que introduciremos en lo que sigue.

Estrategias mixtas (I)

- Sea S_i el conjunto de estrategias del jugador i.
- Una estrategia mixta del jugador i es una distribución de probabilidad sobre (algunas o todas) las estrategias disponibles en S_i .
- Cuando alguien juega una estrategia mixta, significa que escoge aleatoriamente, dando a cada estrategia la probabilidad respectiva.
- [Nota: Una estrategia mixta en la que una sola acción recibe el 100% de probabilidad (es decir, se juega esta acción con total seguridad) se denomina *estrategia pura*.
- Es lo que anteriormente hemos llamado estrategia (a secas), o sea, los elementos de S_i .]

Estrategias mixtas (II)

- Cuatro ejemplos de estrategias mixtas en ‘piedra, papel, o tijera’:

1. Jugar ‘piedra’ con 80% de probabilidad, ‘papel’ con un 15%, y ‘tijera’ con un 5%.
2. Jugar cada estrategia con probabilidad igual a 1/3.
3. Jugar ‘piedra’ con 40%, ‘papel’ con 0% y ‘tijera’ con 60%.
4. Jugar ‘tijera’ con seguridad (es la estrategia *pura* ‘tijera’).

Estrategias mixtas (III)

- Supongamos que los jugadores de un juego pueden jugar estrategias mixtas.
- En tal caso podemos definir un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.
- Es un vector de estrategias mixtas (una para jugador) donde cada estrategia es una respuesta óptima (o mejor respuesta) a las otras estrategias.
- Nota: Como toda estrategia pura es una estrategia mixta, esta definición de equilibrio incluye la que ya hemos visto.
- ¿Cuándo es una estrategia mixta una mejor respuesta? Cuando maximiza la utilidad esperada.

Estrategias mixtas (IV)

- Para entender esto, observe lo siguiente: Dado cualquier vector de estrategias mixtas de los otros jugadores, cualquier estrategia mixta del jugador i define una lotería.
- Podemos hallar las consecuencias posibles, así como sus probabilidades respectivas.
- Y con esto podemos hallar la utilidad esperada de esa estrategia mixta respectiva.
- (Ver apuntes de clase).
- Una estrategia mixta de i es una mejor respuesta a un vector de estrategias mixtas de los otros jugadores si maximiza la utilidad esperada.

Estrategias mixtas (V)

- El concepto de estrategia mixta es importante porque se puede demostrar que (bajo condiciones muy generales) siempre existe *al menos* un equilibrio en estrategias mixtas.
- Esto no siempre ocurre cuando restringimos nuestro análisis a estrategias puras, como vimos para ‘piedra, papel o tijera’.
- [Nota: Un rasgo distintivo de este juego es que todo jugador quiere (1) adivinar la jugada del otro y (2) que el otro no adivine la suya.
- Otro ejemplo similar es el póquer, o el ‘mentiroso’ (ojo: estos 2 juegos no son estáticos, ¿por qué?).]