



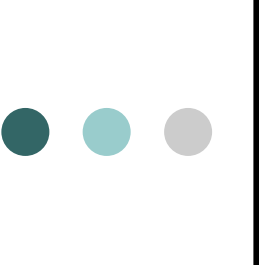
Parte III: Teoría de Juegos

Tema 9: Juegos dinámicos.




¿Qué es un juego dinámico?

- Es cualquier juego no estático.
- Por tanto, estos juegos se caracterizan por cumplir *al menos una* de estas dos propiedades:
 1. *Al menos uno* de los jugadores toma más de una decisión a lo largo del juego.
 2. No todos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente.




Descripción de un juego en forma extensiva (I)

- Para poder predecir el comportamiento de los jugadores en un juego dinámico cualquiera, antes necesitamos de cierta información (la descripción del juego).
- Hasta ahora sólo hemos visto cómo describir un juego estático en forma estratégica (o normal).
- Pues bien, aparte de en forma estratégica, todo juego (tanto estático como dinámico) puede describirse también en *forma extensiva*.




Descripción de un juego en forma extensiva (II)

- Para describir un juego en forma extensiva, debemos describir (gráficamente o con palabras) su *árbol de decisión* (o árbol del juego).
- *Entre otras cosas*, un árbol de decisión está compuesto de
 1. Puntos (llamados *nodos*).
 2. Vectores de números.
 3. Flechas (o líneas) que apuntan de un nodo a otro (o a un vector).
 4. Una etiqueta para cada nodo y cada flecha.



Descripción de un juego en forma extensiva (III)

- Cada nodo representa una situación distinta en la que un jugador tiene que elegir.
- Cada flecha representa una acción distinta.
- Los vectores se utilizan para representar los pagos (utilidades) en cada uno de los posibles 'finales' del juego.
- La etiqueta de cada nodo indica qué jugador escoge en ese nodo.
- La etiqueta de cada flecha contiene el nombre de esa acción.

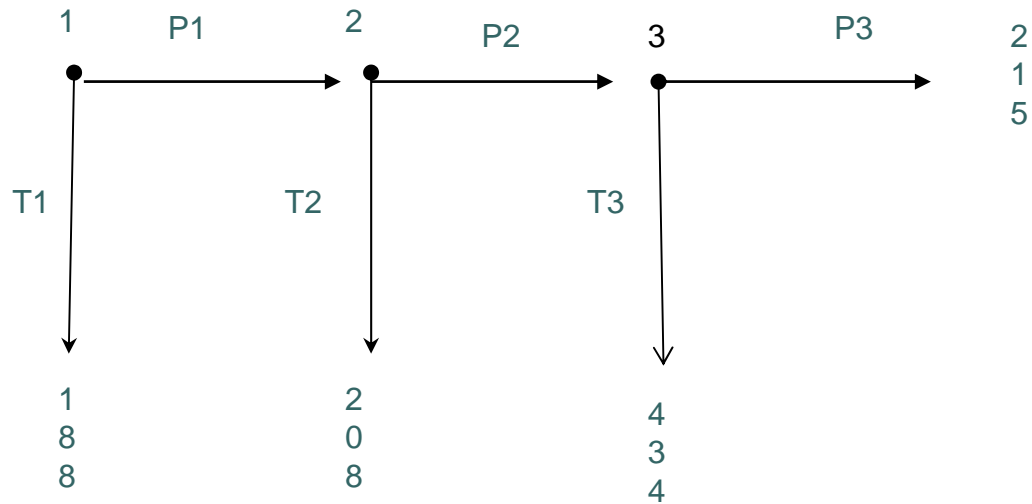


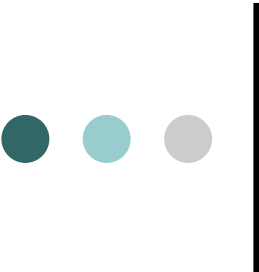
Descripción de un juego en forma extensiva (IV)

- En todo árbol de decisión siempre debe cumplirse lo siguiente:
 1. Existe un único nodo (llamado *nodo inicial*) al que no apunta ninguna flecha. Representa el comienzo del juego.
 2. Cada uno de los nodos restantes (y *todos* los vectores) tienen una única flecha que les apunta.
 3. Todo lo anterior implica que existe un único 'camino' (compuesto de flechas) para ir desde el nodo inicial hasta cualquiera de los nodos (o vectores) restantes.
- Por esta razón hablamos de *árbol* de decisión: Cada uno de los 'caminos' es como la rama de un árbol.

Descripción de un juego en forma extensiva (V)

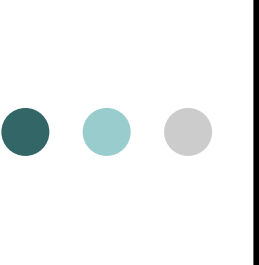
➤ Ejemplo de un árbol de decisión:





Descripción de un juego en forma extensiva (VI)

- El anterior árbol de decisión representa en forma extensiva el siguiente juego dinámico con tres jugadores (1, 2, 3):
- 1 mueve primero, pudiendo elegir entre proseguir el juego (P1) o terminarlo (T1). En este último caso 1, 2 y 3 obtienen una utilidad de 1, 8 y 8, respectivamente.
- Si 1 prosigue, entonces 2 elige entre proseguir (P2) o terminar (T2), alcanzando así un vector de pagos (2, 0, 8).
- Si 2 prosigue, 3 puede elegir entre el vector de pagos (2, 1, 5) o el (4, 3, 4).

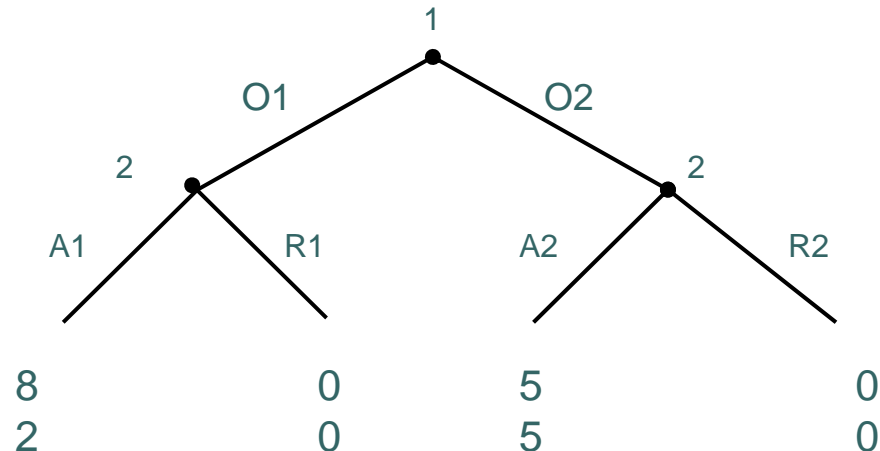


Descripción de un juego en forma extensiva (VII)

- Como ejemplo adicional, consideremos ahora un juego con 2 jugadores (1, 2), llamado *mini-juego del ultimátum*.
- Este juego representa muy simplificada una negociación entre 1 y 2 sobre cómo repartir 10 euros.
- 1 mueve primero, pudiendo elegir entre la oferta O1 (8 euros para 1, 2 euros para 2), y la oferta O2 (5 euros para cada uno).
- Una vez recibida una oferta de reparto, el jugador 2 puede aceptarla (A), en cuyo caso se lleva a cabo el reparto correspondiente, o rechazarla (R), en cuyo caso ambos jugadores se llevan 0 euros.

Descripción de un juego en forma extensiva (VII)

- Por simplificar, supongamos que a cada jugador sólo le importa la cantidad de dinero que él reciba (y no, por ejemplo, la que reciba el otro), de modo que su utilidad coincide con su ganancia monetaria.
- En este caso, el árbol de decisión de este juego es el siguiente:



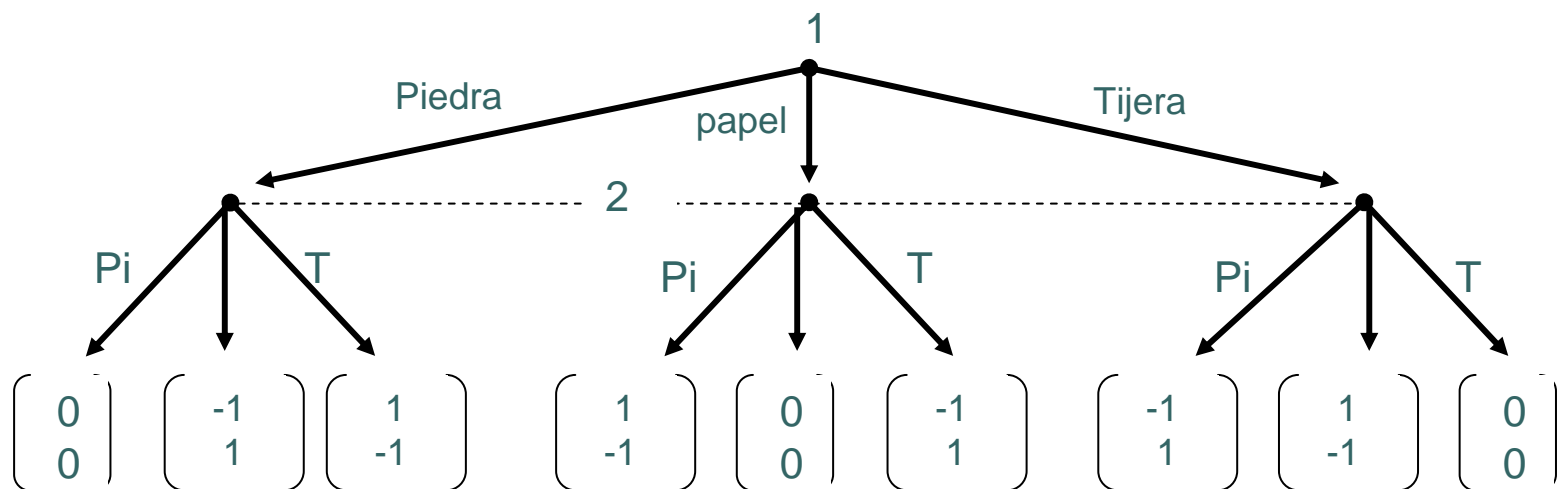


Acciones simultáneas (I)

- Nos queda un último punto en cuanto a árboles de decisión:
- ¿Cómo representar situaciones en la que dos o más jugadores escogen simultáneamente (esto es, sin saber lo que escogen los demás)?
- Por ejemplo, ¿cómo representar el juego 'piedra, papel, o tijera', en el cual dos jugadores escogen simultáneamente entre tres acciones?
- [Nota: A partir de este ejemplo podremos entender cómo representar cualquier juego estático en forma extensiva].

Acciones simultáneas (II)

- Pues bien, 'piedra, papel o tijera' se representa con el siguiente árbol de decisión:



- La novedad aquí es la línea a trazos que une tres nodos, y que tiene la etiqueta '2'.



Acciones simultáneas (III)

- La línea a trazos indica que el jugador 2, cuando mueve en cualquiera de esos nodos, no sabe en cuál exactamente se encuentra (en otras palabras, no sabe lo que 1 ha escogido).
- [Nota: Si en el árbol cambiamos la etiqueta '1' del nodo inicial por '2', y la '2' por '1'; el nuevo árbol también representaría 'piedra, papel o tijera'.
- Es decir, cuando representamos decisiones tomadas *simultáneamente*, el orden en que disponemos los nodos es irrelevante.]

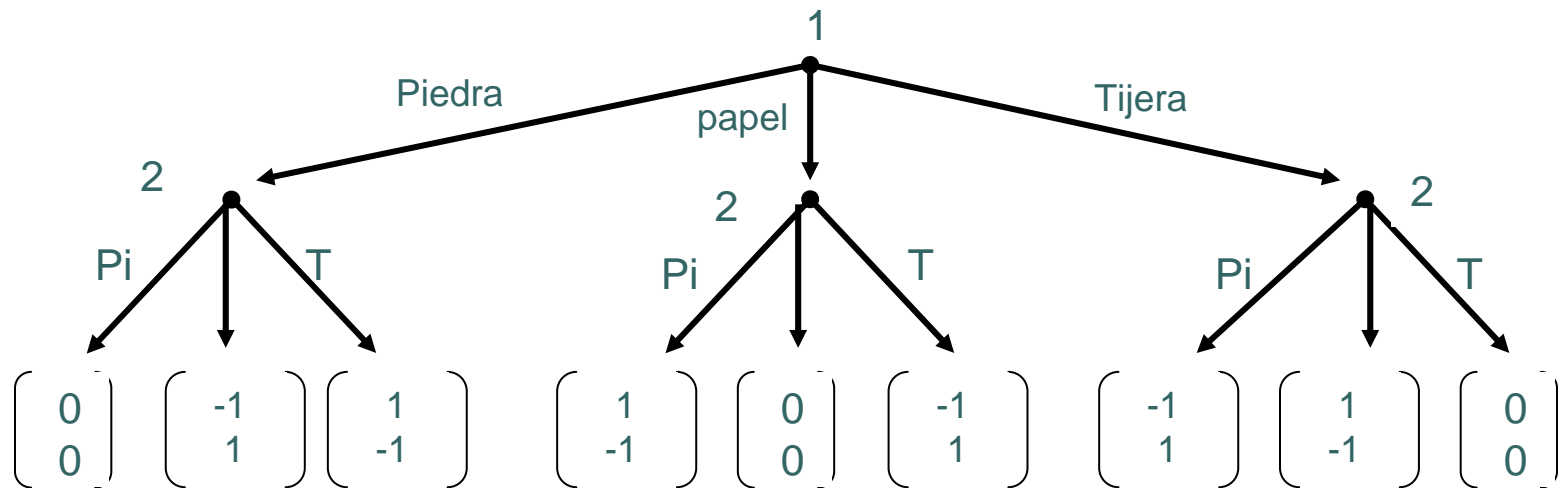


Conjunto de Información (I)

- Lo anterior nos permite introducir el concepto de *conjunto de información*.
- Es cualquier *conjunto* de nodos de un mismo jugador tales que, si éste mueve en uno de ellos, no sabe exactamente en cuál se encuentra.
- Según el juego considerado, habrá conjuntos de información que contengan uno, dos, o más nodos.
- A la hora de dibujar un árbol de decisión, todo conjunto de información tiene que satisfacer una propiedad importante:
- De cada nodo del conjunto tiene que partir el mismo número de flechas, y las etiquetas de las flechas deben ser las mismas para cada nodo.

Conjunto de Información (II)

- Ejemplo: Si 'piedra, papel, o tijera' se juega simultáneamente, cada jugador tiene sólo un conjunto de información.
- ¿Y si 1 mueve primero, 2 observa lo que 1 ha hecho y luego mueve (ver figura)? Entonces 2 tiene 3 conjuntos de información, y el jugador 1 tiene un conjunto.



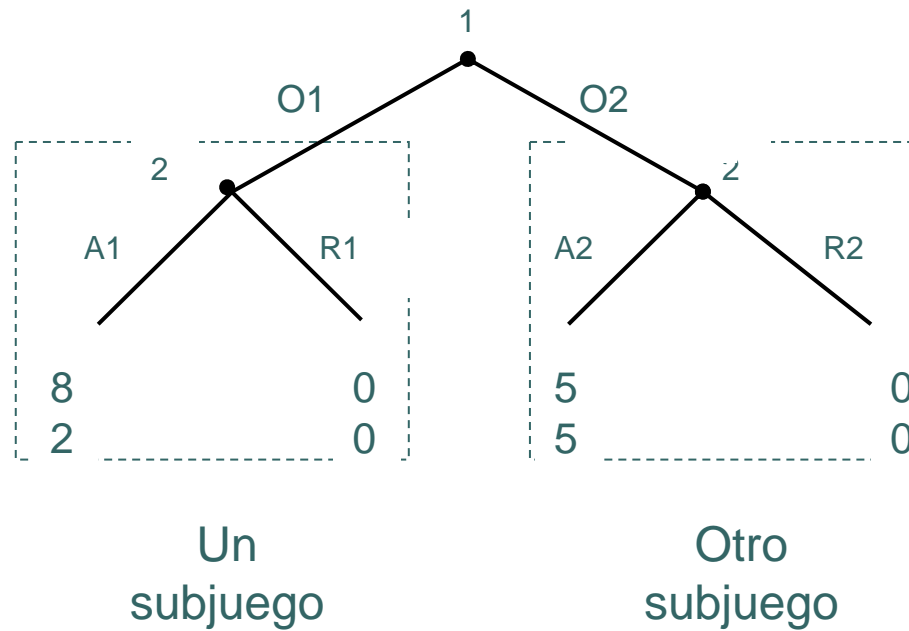


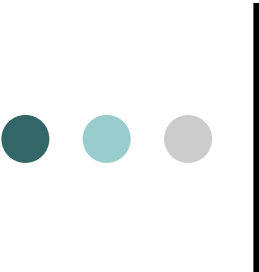
Subjuegos (I)

- Introduzcamos otro nuevo concepto. Para ello, consideremos un juego en forma extensiva con al menos un conjunto de información uninodal. Llamemos n al nodo correspondiente (ojo: Tiene que ser distinto del nodo inicial).
- Consideremos ahora, para todo nodo n' a continuación de n , el conjunto de información al que pertenece n' .
- Si todos los nodos contenidos en ese conjunto están asimismo a continuación de n , decimos que la parte del árbol de decisión que viene a continuación de n es un *subjuego*.
- [Nota: Un conjunto de información es uninodal si contiene un sólo nodo]

Subjuegos (II)

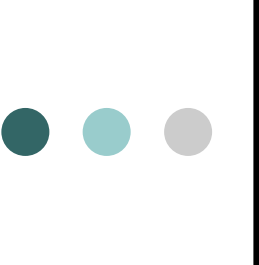
- Ejemplo: En el mini-juego del ultimátum, hay dos subjuegos.





Descripción de un juego en forma estratégica (I)

- Todo juego dinámico (en realidad, cualquier juego) puede describirse en forma extensiva y estratégica.
- Ya hemos definido la forma extensiva, pasemos ahora a la estratégica.
- Como vimos al considerar juegos estáticos en el tema anterior, la forma estratégica consta de tres cosas:
 1. El conjunto de *jugadores*.
 2. El conjunto de *estrategias* de cada jugador.
 3. Los *pagos* (o utilidades) de cada jugador según las estrategias que jueguen los jugadores.



Descripción de un juego en forma estratégica (II)

- Aunque esta definición sigue siendo válida para juegos dinámicos, tenemos que redefinir el concepto de estrategia.
- En juegos estáticos, una estrategia es simplemente una acción. En juegos dinámicos, por el contrario, una estrategia es algo (generalmente) más complejo. En concreto:
- Una estrategia del jugador j en un juego dinámico es cualquier lista (o vector) de acciones, una *para cada conjunto de información* del jugador j .
- En otras palabras: Una estrategia de j es *cualquier* lista que explicita un movimiento para *cada una* de las situaciones (distinguibles) en las que j podría tener que mover.

Descripción de un juego en forma estratégica (III)

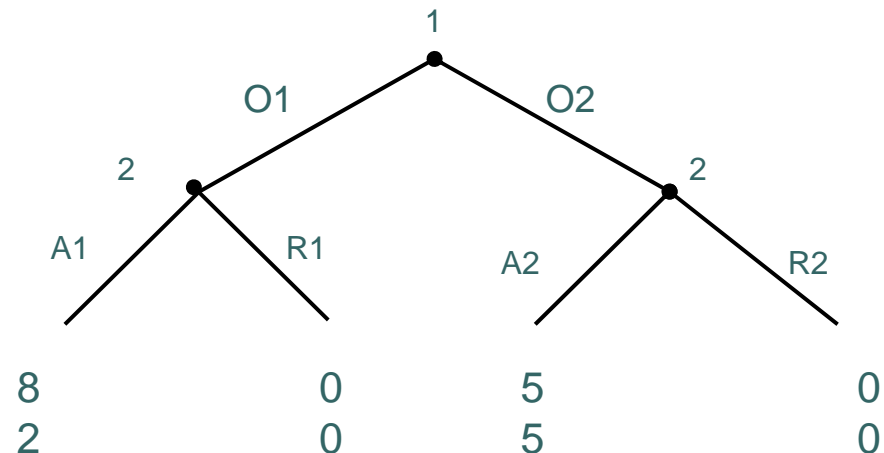
- Ejemplo: ¿Cuáles son todas las estrategias posibles de los jugadores en el mini-juego del ultimátum?
- El jugador 2 tiene dos conjuntos de información, y en cada uno hay dos posibles movimientos (A y R). Por tanto, este jugador tiene cuatro estrategias posibles:

(A1, A2),

(A1, R2),

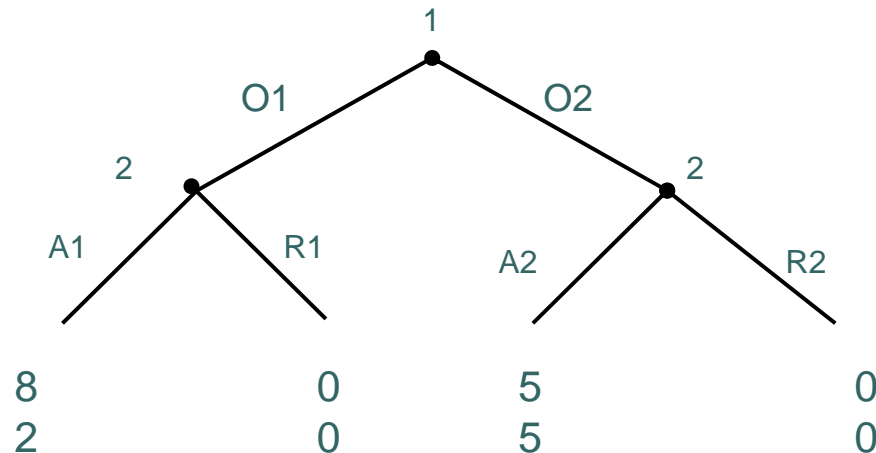
(R1, A2), y

(R1, R2).



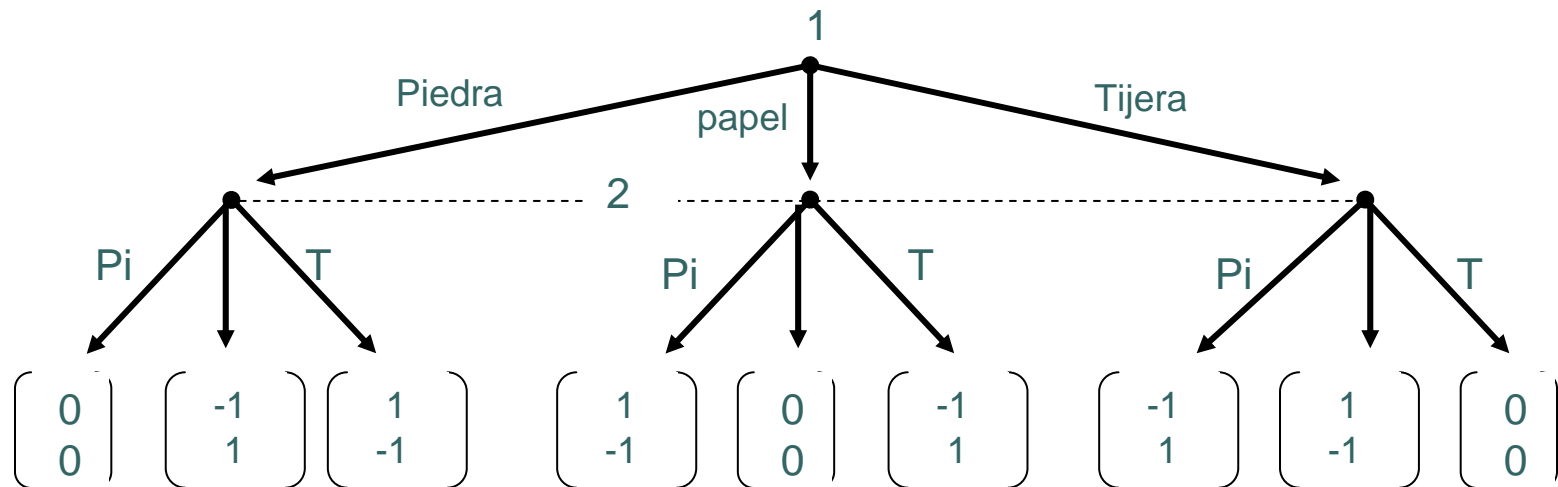
Descripción de un juego en forma estratégica (IV)

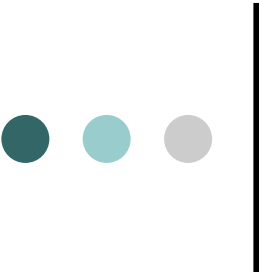
- Por ejemplo, la estrategia (A1, R2) es aquella en la que el jugador 2 movería A1 si recibiera la oferta O1, y R2 si recibiera O2. Y así con el resto de sus estrategias.
- En cuanto al jugador 1, éste sólo tiene un conjunto de información. Por tanto, cualquier estrategia suya sólo contiene una acción. Hay dos estrategias posibles: O1 y O2.



Descripción de un juego en forma estratégica (V)

- Otro ejemplo: ¿Cuáles son las estrategias de los jugadores en 'piedra, papel o tijera'?
- (Recuérdese que toda estrategia debe especificar una acción para cada *conjunto de información* del jugador).





Descripción de un juego en forma estratégica (VI)


- Una vez determinadas las estrategias de los jugadores, y siempre que el número de éstas sea finito, podemos representar la forma estratégica de un juego dinámico de *dos* jugadores por medio de una matriz de pagos.
- ¡Cuidado: Cada jugador tiene que tener en esta matriz tantas filas (o columnas) como estrategias tenga!
- En cada celda deben aparecer los pagos de cada jugador si los jugadores jugasen de acuerdo a las estrategias correspondientes.

Descripción de un juego en forma estratégica (VII)

- Ejemplo: La matriz de pagos del mini-juego del ultimátum es la siguiente (se ha situado el jugador 1 en filas y al jugador 2 en columnas, pero también podría hacerse del otro modo):

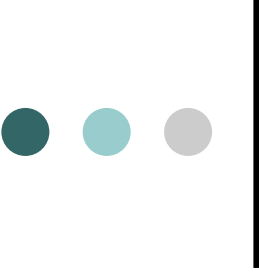
	A1, A2	A1, R2	R1, A2	R1, R2
O1	8, 2	8, 2	0, 0	0, 0
O2	5, 5	0, 0	5, 5	0, 0

- Por ejemplo, en la casilla [O1, (R1, A2)] aparecen unos pagos de (0, 0) porque si 1 mueve O1 y 2 juega de acuerdo a (R1, A2), entonces cada jugador obtendrá un pago de 0 (1 ofrecerá O1 y 2 lo rechazará).



¿Forma estratégica o forma extensiva? (I)

- ¿Por qué existen dos formas posibles de describir un juego?
¿Por qué no utilizar sólo una?
- Nótese que la diferencia principal entre ambas descripciones es que la forma estratégica proporciona menos información sobre el juego,
- mientras que la forma extensiva añade información sobre:
 1. El orden en el que los jugadores toman las distintas decisiones.
 2. Lo que cada jugador sabe, a la hora de tomar una decisión, sobre cómo se comportaron los otros jugadores previamente.



¿Forma estratégica o forma extensiva? (II)

- Pues bien, la mayoría de los teóricos piensan que la información contenida en la forma estratégica es suficiente para predecir el comportamiento de los individuos en *juegos estáticos*.
- (Por eso no hablamos de la forma extensiva en el tema anterior)
- En los juegos dinámicos, muchos teóricos piensan lo contrario, y por ello prefieren usar la forma extensiva (este es un punto abierto a debate, no obstante).



¿Cómo jugarán los jugadores? (I)

- En el tema anterior introdujimos dos conceptos que podían servirnos para predecir el comportamiento de los jugadores:
 1. Estrategias estrictamente dominadas (recordemos que este concepto no da predicciones precisas en numerosos juegos).
 2. Equilibrio de Nash.
- Aunque estos conceptos fueron definidos para juegos estáticos, siguen siendo aplicables en juegos dinámicos (por supuesto, hay que tener en cuenta lo que es una estrategia en un juego dinámico).

¿Cómo jugarán los jugadores? (II)

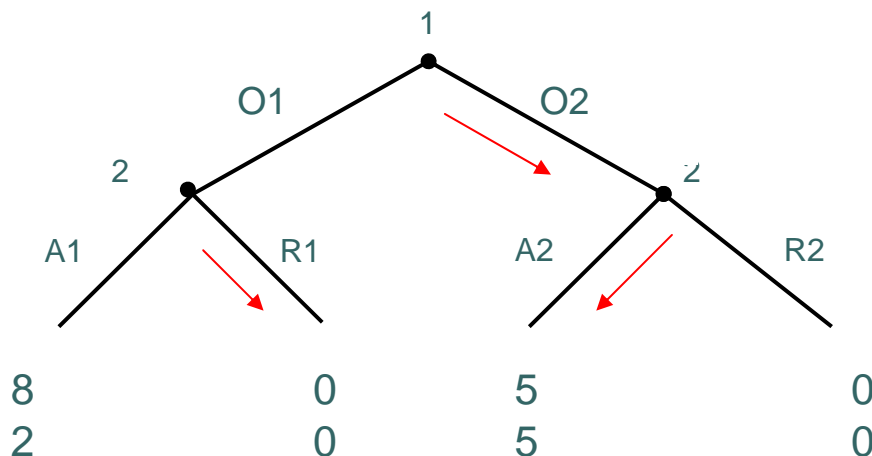
- Por ejemplo, hallar los equilibrios de Nash en el mini-juego del ultimátum es muy sencillo (basta con aplicar la 'reglita' descrita en el tema anterior)

	A1, A2	A1, R2	R1, A2	R1, R2
O1	8, 2	8, 2	0, 0	0, 0
O2	5, 5	0, 0	5, 5	0, 0

- Hay 3 vectores de estrategias que son equilibrios:
 - [O1, (A1, A2)],
 - [O1, (A1, R2)],
 - [O2, (R1, A2)].

Amenazas no creíbles (I)

- Aprovechemos este ejemplo para introducir un nuevo concepto. Para ello consideremos el equilibrio $[O2, (R1, A2)]$ (las flechas de la figura indican los movimientos de cada estrategia).
- Si lo pensamos, la razón por la que el jugador 1 encuentra óptimo jugar $O2$ en este equilibrio es porque piensa que el jugador 2 rechazaría la oferta $O1$ si se la hiciera.
- ¿Es razonable pensar esto?





Amenazas no creíbles (II)

- No, porque en el hipotético caso de que el jugador 1 ofreciese O_1 , el jugador 2 obtendría más utilidad aceptando que rechazando.
- En este sentido, se dice que la estrategia (R_1, A_2) del jugador 2 contiene una *amenaza no creíble* (la de que rechazaría la oferta O_1 si se la hicieran).
- Nótese que lo mismo ocurre con el equilibrio $[O_1, (A_1, R_2)]$: También contiene una amenaza no creíble.
- Por el contrario, el equilibrio $[O_1, (A_1, A_2)]$ no contiene ninguna amenaza no creíble porque todos los jugadores juegan óptimamente en cualquier situación (incluso las hipotéticas)

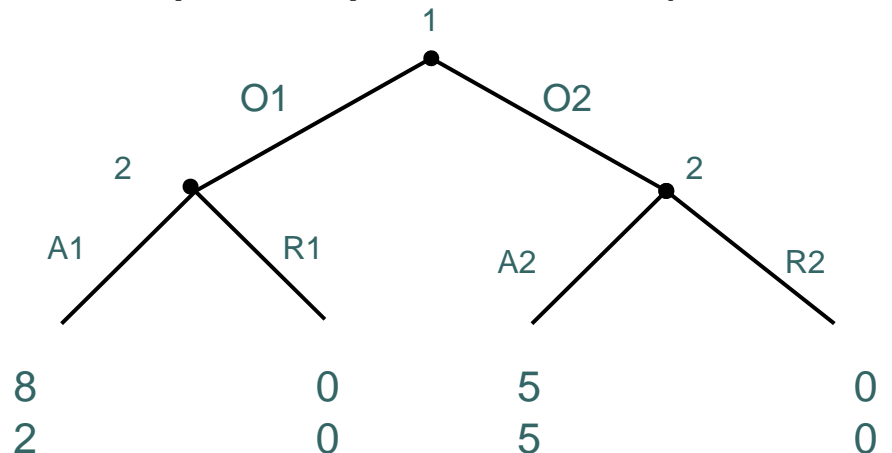


Equilibrio Perfecto en Subjuegos (I)

- Pues bien, se dice que un equilibrio de Nash es *perfecto en subjuegos* si no contiene ninguna amenaza no creíble.
- Esta definición es intuitiva pero algo imprecisa. Para una definición más correcta, utilizaremos el concepto de subjuego.
- Recordemos que un subjuego es una parte del juego que, considerada de manera aislada, tiene forma de árbol de decisión.
- Un equilibrio de Nash de un juego es un equilibrio perfecto en subjuegos si constituye un equilibrio de Nash de cada uno de los subjuegos del juego.

Equilibrio Perfecto en Subjuegos (II)

- Por ejemplo, en el mini-juego del ultimátum hay dos subjuegos (uno para cada nodo del jugador 2).
- El equilibrio $[O2, (R1, A2)]$ no es perfecto en subjuegos porque el jugador juega la estrategia R1 en el subjuego de la izquierda, y eso no es un equilibrio *en ese subjuego*. Algo similar ocurre con el equilibrio $[O1, (A1, R2)]$.
- Por el contrario, el equilibrio $[O1, (A1, A2)]$ sí da un equilibrio de Nash en cada subjuego.



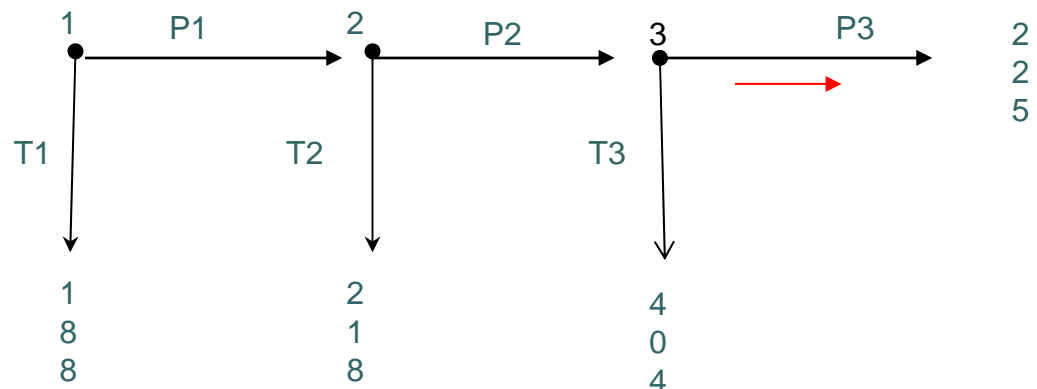


Inducción hacia atrás (I)

- ¿Cómo hallar los equilibrios perfectos en un juego? Una manera posible es hallar todos los equilibrios de Nash del juego y luego analizar cada subjuego para ver si esos equilibrios contienen alguna amenaza no creíble.
- Otra manera es utilizando el método de *inducción hacia atrás*.
- Podemos utilizarlo en cualquier árbol de decisión que tenga un número finito de nodos y donde los jugadores nunca tomen decisiones simultáneas (ejemplos: El ajedrez, el mini-juego del ultimátum, etc.).
- Nota: requiere asumir que la racionalidad de los jugadores es de conocimiento público.

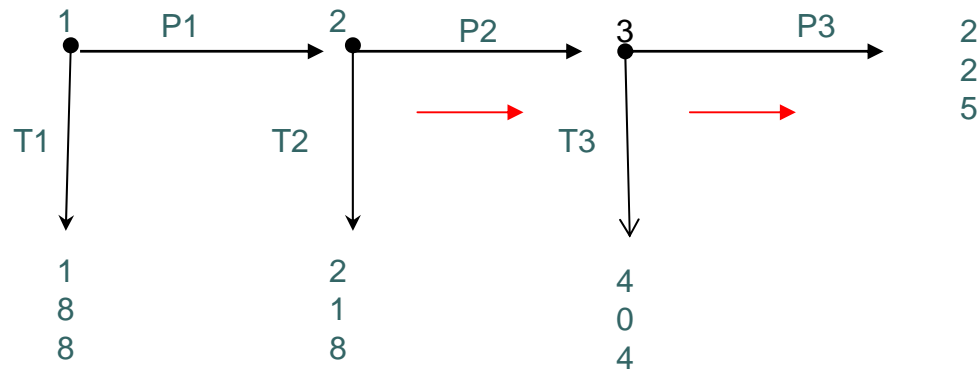
Inducción hacia atrás (II)

- Describiremos el método con un ejemplo.
- Lo primero es considerar (uno a uno) todos los nodos 'finales' –es decir, aquellos en los que todas las acciones o flechas apuntan directamente a un vector de pagos.
- En el ejemplo sólo hay uno: El del jugador 3.
- Si el juego alcanzara este nodo, ¿qué movería 3? Claramente la acción conducente al mayor pago propio (en este caso, P3).



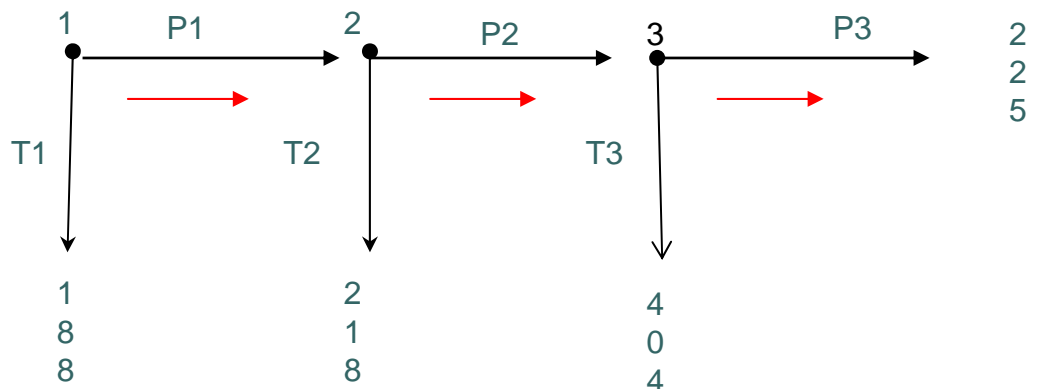
Inducción hacia atrás (III)

- Ahora consideramos (uno a uno) todos los nodos 'penúltimos' –es decir, aquellos cuyas flechas apuntan directamente a un nodo 'final' (al menos una de ellas) *y/o* a un vector de pagos.
- En el ejemplo sólo hay uno: El del jugador 2.
- Si el juego alcanzara este nodo, ¿qué movería 2? Como sabe que 3 es racional, sabe que 3 movería P3 en el nodo final.
- Teniendo esto en cuenta, lo mejor para 2 es mover P2.



Inducción hacia atrás (IV)

- El único nodo por considerar es el del jugador 1.
- Como la racionalidad de los jugadores es de conocimiento público, 1 sabe que 2 y 3 moverían P2 y P3 respectivamente si tuvieran que actuar en sus nodos.
- Teniendo esto en cuenta, lo mejor para 1 es mover P1.
- Con todo esto hemos obtenido el vector de estrategias (P1, P2, P3).





Inducción hacia atrás (V)

- Pues bien, puede demostrarse que este vector de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos.
- Notas:
- En otros juegos más largos habría que continuar el proceso hasta considerar todos los nodos. Siempre, eso sí, yendo desde los 'finales' del árbol hacia el nodo inicial (¡piense cómo sería con el juego del ajedrez!).
- Si algún jugador está indiferente entre dos o más acciones en algún nodo (porque le den el mismo pago), entonces el juego tendrá múltiples equilibrios perfectos.

Juegos repetidos (I)

- Una clase muy importante de juegos dinámicos son los juegos repetidos.
- Para ilustrar su importancia, pensemos primero en el juego del dilema del prisionero (DP), con la siguiente matriz de pagos (por ejemplo):

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	5, 5	0, 8
No cooperar	8, 0	1, 1

- (Obsérvese que se cumple $d > c > m > t = 0$, y $2c > d$).

Juegos repetidos (II)

- Recordemos que, para ambos jugadores, la estrategia 'cooperar' está estrictamente dominada por 'no cooperar'.
- Por tanto, la teoría predice que ningún jugador cooperará y, como resultado, cada jugador obtendrá un pago igual a 1.
- Ahora, supongamos que el DP se juega infinitas rondas en vez de una sola ronda (lo que vamos a demostrar para este caso también puede mostrarse para el caso en que exista siempre cierta probabilidad de volver a jugar otra ronda), ¿qué ocurriría entonces?

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	5, 5	0, 8
No cooperar	8, 0	1, 1



Juegos repetidos (III)

- En este caso, y bajo ciertas condiciones, *puede* ser óptimo para los jugadores cooperar.
- Más precisamente: Existe un equilibrio del juego repetido donde los jugadores cooperan recíprocamente, es decir, cooperan sólo si el otro coopera.
- En este equilibrio, cooperar es una mejor respuesta: Aunque supone una pérdida en el corto plazo, las ganancias a largo plazo compensan (si el largo plazo es suficientemente 'largo').
- En lo que sigue formalizaremos estas ideas.



Juegos repetidos (IV)

- Existen varias maneras de modelar este tipo de juegos. Nosotros consideraremos una de ellas, pero pueden consultarse otras en libros de texto.
- En concreto, supondremos que el jugador valora toda utilidad futura con cierto descuento. En concreto, en el momento t , una utilidad de $u(t+i)$ en la ronda $t+i$ se valora con un descuento δ^i .
- Por consiguiente, una sucesión de pagos $u(t)$, $u(t+1)$, $u(t+2)$, etc., se valora en el momento t como:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \cdot u(t+i) \quad (1)$$



Juegos repetidos (V)

- Pues bien, puede demostrarse que el vector de estrategias donde
 1. Cada jugador coopera en la primera ronda.
 2. Cada jugador coopera si los dos jugadores cooperaron en todas las etapas previas.
 3. Cada jugador no coopera si alguno no cooperó en alguna etapa previa.
- Es un equilibrio de Nash bajo ciertas condiciones (nota: Estas estrategias reciben el nombre de *estrategias de gatillo*).

Juegos repetidos (VI)

- Para demostrar esto, notemos primero que si los jugadores juegan estas estrategias, entonces obtendrán un pago de 5 en cada repetición.
- Utilizando la fórmula de la suma de infinitos términos de una progresión geométrica, la utilidad de esta sucesión de pagos es $5/(1-\delta)$.
- Por otro lado, si un jugador se desvía unilateralmente de esta estrategia (es decir, si no coopera en una ronda), obtendrá un pago de 8 en esa ronda, y de 1 en las siguientes (porque siguiendo su estrategia de gatillo, el otro jugador no cooperará nunca más).

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	5, 5	0, 8
No cooperar	8, 0	1, 1

Juegos repetidos (VII)

- La utilidad de esta sucesión de pagos es $8 + \frac{\delta}{1 - \delta}$.
- $\frac{5}{1 - \delta} > 8 + \frac{\delta}{1 - \delta}$ si $\delta > \frac{3}{7} \rightarrow$ queda demostrado que no es óptimo desviarse unilateralmente de una estrategia de gatillo (si el descuento δ es suficientemente alto).
- En otras palabras, un vector de estrategias de gatillo es un equilibrio de Nash.
- En un dilema del prisionero repetido, por tanto, la cooperación es posible en equilibrio.

	Cooperar	No cooperar
Cooperar	5, 5	0, 8
No cooperar	8, 0	1, 1



Juegos repetidos (VIII)

➤ Notemos alguna cosa:

1. Aparte de este equilibrio, existen muchos otros (no cooperar en ninguna ronda, por ejemplo). Por tanto, la teoría no da una predicción precisa.
2. Puede probarse que si el juego no pudiera repetirse a partir de una ronda determinada, el único equilibrio sería 'no cooperar nunca': La cooperación requiere un horizonte infinito de juego.