# Tema 12: Modelos de distribución de probabilidad: Variables Continuas

1. **EL MODELO RECTANGULAR**

2. **EL MODELO NORMAL, $N(\mu; \sigma)$**

3. **MODELO CHI-CUADRADO DE PEARSON, ${}_p\chi^2_k$**

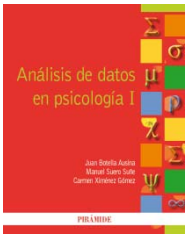
4. **MODELO *t* DE STUDENT, ${}_pt_k$**

5. **MODELO F DE SNEDECOR, ${}_pF_{m,n}$**

---

***Bibliografía***: Tema 12 (pág. 303-339) y Tablas II, III, IV y V del apéndice final

***Ejercicios recomendados***: 1, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 16, 19, 20, 21, 26, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 40, 46, 51, 54 y 56.

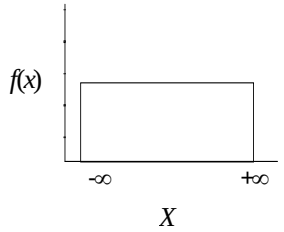


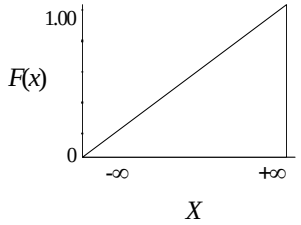
La mayor parte de las variables continuas también tienen asociada su función de densidad de probabilidad y su función de distribución. En algunos casos se ajusta a un modelo teórico. Aquí veremos cinco modelos para variables continuas.

# 1. EL MODELO RECTANGULAR

Es la equivalente a la distribución uniforme de las variables discretas. Por tanto, una variable aleatoria se ajusta a este modelo si todos los valores con probabilidad no nula tienen la misma función de densidad.

Gráficamente se representa mediante:



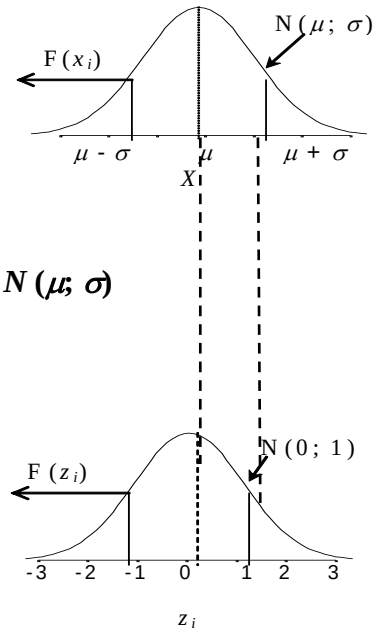




# 2. EL MODELO NORMAL, $N(\mu; \sigma)$

La curva Normal además de una fórmula matemática es un fenómeno natural puesto que es frecuente encontrarse variables con distribuciones Normales.

***El modelo Normal***

- Existe un valor central (la media), $\mu$, donde se concentran la mayor parte de los individuos.
- A medida que nos alejamos de $\mu$ (a la derecha, con puntuaciones altas y a la izda. con bajas) el número de individuos se reduce.




*X* se distribuye *Normalmente* con parámetros $\mu$ y $\sigma$ Es decir: $\boldsymbol{X \sim N(\mu; \sigma)}$

si su función de densidad es: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}$

Para <u>variables tipificadas</u>: $z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$, esta fórmula toma

un aspecto más sencillo: $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}$

***Teorema de la Tipificación***: Para variables Normales, la función de distribución asociada a un valor $x_i$ es la misma que la asociada a ese valor en típicas ($z_i$). Esto es: $\mathbf{F(x_i) = F(z_i)}$

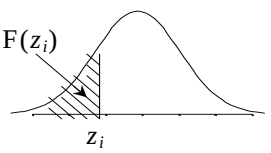
Ejemplo:

$\boldsymbol{X \sim N(10; 2)}$ .... La variable *X* se distribuye Normalmente con media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$
$\mathbf{z} \sim \boldsymbol{N(0; 1)}$ ..... La variable *z* se distribuye Normalmente con media 0 y desviación típica 1

### Tablas estadísticas

Las tablas con la probabilidad correspondiente a los valores de $X_i$ están en típicas $z_i$.

Forma de consultar la tabla (ver Tabla II en pág. 409-413 del libro):

| $z_i$ | F($z_i$) … Área por la izda. |
|---|---|
| -3,00 ⋮ 3,00 |   |

Para buscar la probabilidad asociada a un valor $X$ en la tabla Normal:

1º. Tipificar la puntuación: $z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$

2º. $P(X \le x_i) = P(z \le z_i) = F(z_i)$

$P(X \ge x_i) = P(z \ge z_i) = 1 - P(z \le z_i) = 1 - F(z_i)$

$P(x_1 \le X \le x_2) = P(z_1 \le z \le z_2) = F(z_2) - F(z_1)$

**Ejemplo:**

La variable estatura en una muestra de estudiantes de bachilllerato se distribuye $N$ (170; 8).

1. Probabilidad de que un sujeto mida al menos 165 cm:

   $P(X \ge 165) = P\left(z \ge \frac{165-170}{8}\right) = P(z \ge -0{,}625) = 1 - P(z \le -0{,}625) = 1 - 0{,}2643 = 0{,}7357$

2. Probabilidad de que un sujeto mida entre 168 y 174 cm:

   $P(168 \le X \le 174) = P\left(\frac{168-170}{8} \le z \le \frac{174-170}{8}\right) = P(-0{,}25 \le z \le 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}25) =$

   $= 0{,}6915 - 0{,}4013 = 0{,}2902$

### Aproximación de la Binomial a la Normal:

La distribución Normal se utiliza para aproximar las probabilidades asociadas al modelo binomial $X \sim B(N; \pi)$ cuando $N > 20$.

Para ello se calculan las puntuaciones típicas realizando la ***corrección por continuidad***:

$$z = \frac{(X \pm 0{,}5) - E(X)}{\sigma(X)}; \quad \text{Donde: } E(X) = N \cdot \pi;\ \sigma(X) = \sqrt{N \cdot \pi \cdot (1-\pi)}$$

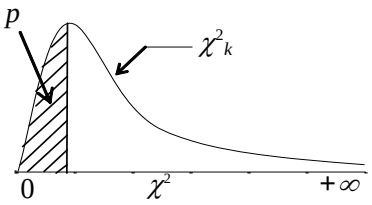
y se busca el área de probabilidad asociada en las tablas de la Normal tipificada.

## 3. MODELO CHI-CUADRADO DE PEARSON, ${}_p\chi^2_k$

*Definición*: Si $\boxed{\mathbf{T} = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2}$

[donde $z^2_1, z^2_2, \ldots, z^2_k$ son valores de la distribución $N$ (0; 1)]

Entonces **T** (*se distribuye según*) ~ $\boldsymbol{\chi^2_k}$




*Notación*: ${}_p\chi^2_k$; donde $p$ = probabilidad acumulada

$k$ = grados de libertad (*g.l.*)

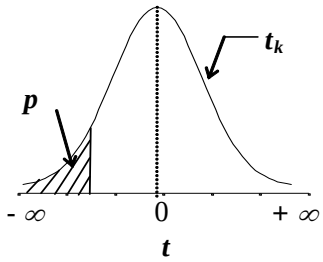
*Propiedades*:

- El modelo $\chi^2$ refleja una distribución asimétrica positiva que sólo toma valores positivos
- Parámetros: $E(\chi^2_k) = k$ y $\sigma(\chi^2_k) = \sqrt{2k}$
- Si $X \sim \chi^2_a$ e $Y \sim \chi^2_b$ (siendo $X$ e $Y$ independientes) y se define $T = X + Y$, entonces $T \sim \chi^2_{a+b}$
- $\chi^2$ tiende a la Normal cuando $k \to \infty$
- Tablas estadísticas: Tabla III (pág. 414-415 del libro). Ejemplo: ${}_{0,05}\chi^2_6 = 1{,}635$

## 4. MODELO *t* DE STUDENT, ${}_p t_k$

*Definición*: Si $X \sim N(\mu; \sigma)$
$Y \sim \chi^2_k$

Entonces $\boxed{\mathbf{T} = \dfrac{X}{\sqrt{Y/k}} = \dfrac{z}{\sqrt{\chi^2_k / k}}}$ **T** (*se distribuye según*) ~ $t_k$




*Notación*: ${}_p t_k$ ; donde $p$ = probabilidad acumulada
$k$ = grados de libertad (*g.l.*)

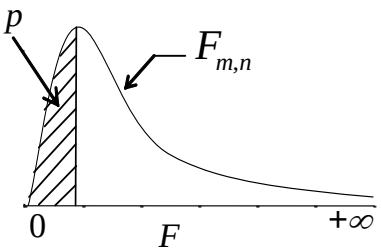
*Propiedades*:

- El modelo $t_k$ refleja una distribución simétrica y asintótica por ambas colas
- Parámetros: E ($t_k$) = 0 y $\sigma(t_k) = \sqrt{k/k-2}$
- *t de Student* tiende a la Normal cuando $k \to \infty$
- Tablas estadísticas: Tabla IV (pág. 416 del libro). Como la distribución es simétrica, solo viene la mitad de la tabla. Por tanto hay que tener en cuenta que: P($t_k \geq$ T) = P($t_k \leq$ -T) y P($t_k \leq$ T) = P($t_k \geq$ -T). Ejemplo: ${}_{0,80}t_5$ = 0,92. Por tanto: P($t_5 \geq$ 0,92) = 0,20 = P($t_5 \leq$ -0,92) y P($t_5 \leq$ 0,92) = 0,80 = P($t_5 \geq$ -0,92).

## 5. MODELO F DE SNEDECOR, ${}_p F_{m,n}$

*Definición*: Si $X \sim \chi^2_m$
$Y \sim \chi^2_n$

Entonces $\boxed{\mathbf{T} = \dfrac{X/m}{Y/n} = \dfrac{\chi^2_m / m}{\chi^2_n / n}}$ **T** ~ $F_{m,n}$




*Notación*: ${}_p F_{m,n}$ ; donde $p$ = prob. acumulada,
$m$ = g.l. de $X$ y $n$ = g.l. de $Y$

*Propiedades*:

- La forma del modelo de distribución *F de Snedecor* es como la de $\chi^2$ (asimétrica positiva y asintótica sólo por la cola derecha).
- Parámetros: $\mathrm{E}(F_{m,n}) = \dfrac{n}{n-2}$ y $\sigma(F_{m,n}) = \sqrt{\dfrac{2 \cdot n^2 (m+n-2)}{m \cdot (n-4)(n-2)^2}}$ (sólo si $n > 2$)
- Si $W = T^2$, entonces: $W = \dfrac{z^2}{\left(\sqrt{\chi^2_k / k}\right)^2} = \dfrac{\chi^2_1 / 1}{\chi^2_k / k}$ y $W \sim {}_p F_{1,k}$ . Donde: $E(W) = \dfrac{k}{k-2}$ y $\sigma(W) = \sqrt{\dfrac{2k^2(k-1)}{(k-4)(k-2)^2}}$
- *F de Snedecor* tiende a la Normal cuando $m \to \infty$ y $n \to \infty$
- Tablas estadísticas: Tabla V (pág. 417-431 del libro). Ejemplo: ${}_{0,10}F_{6,5}$ = 0,322
- Propiedad de la inversión: También puede usarse la fórmula ${}_p F_{m,n} = \dfrac{1}{{}_{1-p}F_{n,m}}$

En el ejemplo anterior: ${}_{0,10}F_{6,5} = \dfrac{1}{{}_{0,90}F_{5,6}} = \dfrac{1}{3,108} = 0,322$

# 6. EJERCICIOS

## Ejercicio 1

La variable *CI* se distribuye $N(100;\ 15)$ en la población de estudiantes universitarios. Se selecciona una muestra aleatoria de 200 sujetos. Si se extrae un sujeto al azar:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que puntúe en *CI* como máximo 120?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que puntúe en *CI* al menos 95?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que puntúe en *CI* entre 90 y 99?
4. ¿Qué puntuación en *CI* tiene una probabilidad acumulada de 0,5793?
5. ¿Qué puntuación en *CI* ocupa el centil 65?
6. ¿Entre qué valores está el 50% medio de las observaciones?
7. ¿Cuántos sujetos superan la puntuación $CI = 110$?

## Ejercicio 2

Una empresa necesita seleccionar sujetos *extrovertidos* y con *fluidez verbal* para realizar tareas comerciales. Se presentan 40 candidatos. Se establece como criterio seleccionar aquellos sujetos que superen el centil 75 en ambas. Se sabe que la *extroversión* ($X$) sigue un modelo N(8; 2) y la *fluidez verbal* ($Y$) un modelo N(10; 3) y que ambas variables son independientes.

1. ¿Cuántos sujetos serán seleccionados?
2. ¿Qué puntuaciones directas se deben superar en *extroversión* y *fluidez verbal* para ser seleccionado?
3. Si extraemos al azar a 10 de los candidatos, calcule la probabilidad de que menos de la mitad superen la puntuación 9,68 en *extroversión*.

## Ejercicio 3

La variable $X$ se distribuye según $\chi^2$ con 10 grados de libertad.

1. Si se extrae un sujeto al azar, calcule la probabilidad de que no supere el valor 9,342
2. Calcule el valor de $X$ tal que la probabilidad de obtener como máximo ese valor sea 0,70
3. Calcule la probabilidad de observar valores en la variable $X$ entre 3,94 y 13,442
4. Calcule la puntuación $X$ que corresponde al centil 80 (en directas, diferenciales y típicas)
5. Calcule la probabilidad de que la variable $X$ adopte como mínimo el valor 15,987
6. Calcule la puntuación $X$ que corresponde a la probabilidad acumulada de 0,99

## Ejercicio 4

La variable $X$ se distribuye según *t de Student* con 25 grados de libertad.

1. Si se extrae un sujeto al azar, calcule la probabilidad de que no supere el valor 2,06
2. Calcule el valor de $X$ tal que la probabilidad de obtener como máximo ese valor sea 0,70
3. Calcule la probabilidad de observar valores en $X$ entre -1,316 y 1,316
4. ¿Qué valor corresponde a la mediana?
5. Si dividimos la distribución en cuatro partes iguales, ¿Qué valores generan dicha partición?

## Ejercicio 5

La variable $X$ se distribuye según $F_{7,\,8}$

1. Si se extrae un sujeto al azar, calcule la probabilidad de que no supere el valor 3,5
2. Calcule el valor de $X$ tal que la probabilidad de obtener como mínimo ese valor sea 0,75
3. Calcule la probabilidad de observar valores en $X$ entre 0,988 y 7,694
4. ¿Qué valor corresponde al primer cuartil?