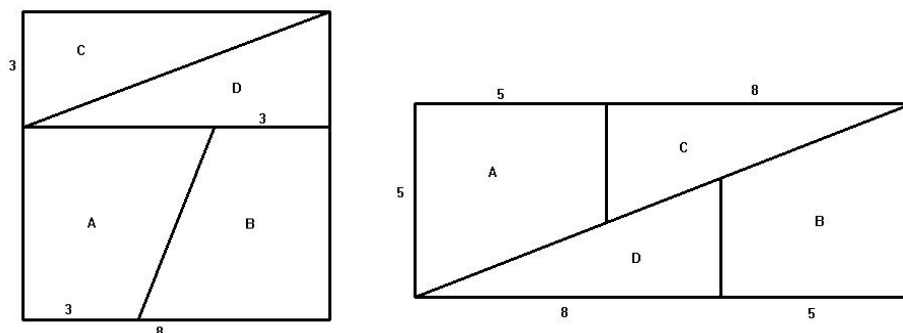


7 Paradojas

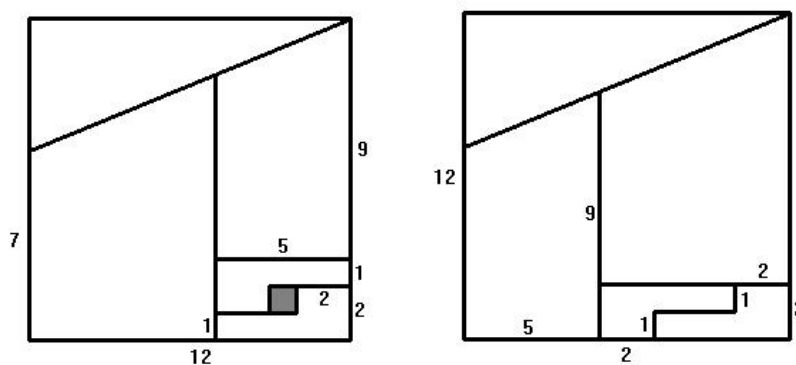
7.1 Sesión 1

Hoy vamos a ver algunas situaciones en matemáticas en las que razonamientos que parecen impecables llevan a algunas contradicciones lógicas. Estas **paradojas** son llamadas con más precisión **falacias**. Intenta mirarlas con detalle y detectar el posible error.

1. Dibuja un cuadrado de 8×8 y divídelo en trozos como indica la figura de la izquierda. Reordena luego los trozos como indica la figura de la derecha y llegarás a la conclusión de que $64 = 65$. ¿Dónde está el error?

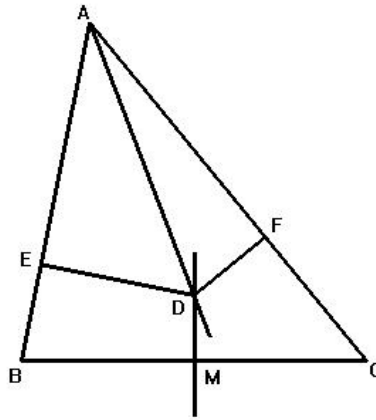


2. Muy parecida a la anterior: En una alfombra cuadrada de $12 \times 12 \text{dm}^2$ se ha caído una estufa y le ha hecho un agujero como indica la figura de la izquierda. Pero si la recortamos y disponemos las piezas como indica la figura de la derecha, el agujero ha desaparecido. ¿Dónde ha ido?



3. Ahora vamos a demostrar que todos los triángulos son isósceles.
 En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo desigual coincide con la mediatriz del lado desigual y en uno que no lo es, estas dos líneas se cortan en un punto. Supón, pues, el triángulo ABC en el que $AB \neq AC$.
 Así pues, la bisectriz de A y la mediatriz de BC se cortarán en un punto que llamaremos D . DE y DF son perpendiculares a AB y AC respectivamente y como D es de la bisectriz de A , entonces $DE = DF$.
 Como los triángulos rectángulos AED y AFD tienen hipotenusa común y un cateto

igual, sus otros catetos AE y AF son también iguales.



$DB = DC$ pues D es de la mediatriz de BC , y como los triángulos rectángulos DBE y DCF tienen igual hipotenusa y los catetos DE y DF iguales, sus otros catetos EB y FC también son iguales. Así pues, de las igualdades

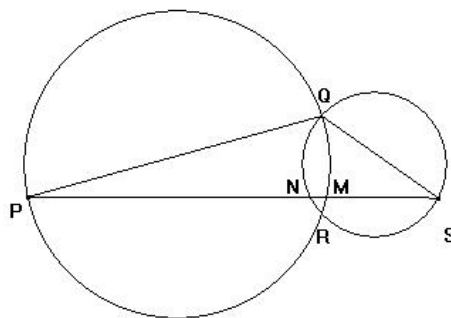
$$\begin{aligned} AE &= AF \\ EB &= FC, \end{aligned}$$

sumando término a término, obtenemos $AB = AC$.

4. Imagínate una recta y un punto dibujados en el folio, de manera que el punto no esté en la recta. ¿Cuántas perpendiculares hay desde ese punto a esa recta? _____
¿Seguro?

Las dos circunferencias de la figura se cortan en Q y en R . Trazamos los diámetros PQ y QS , unimos P con S y sean M y N los puntos de corte de PS con cada una de las circunferencias. ¿Cómo son los ángulos QMS (vértice en M) y QNP (vértice en P). _____.

Así pues QM y QN son perpendiculares a PS .



5. Un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso.
Considera el rectángulo $ABCD$. BE es exterior al rectángulo y de igual longitud que BC . GP y FP son las mediatrices de AB y DE respectivamente.
Así pues, $PD = PE$ y $PA = PB$, por lo que los triángulos ADP y BEP tienen

7.2 Sesión 2

Hoy vas a ver unas cuantas falacias más, fundamentalmente aritméticas. Intenta detectar el error en el razonamiento.

1. Supón que a , b y c son números positivos tales que $a = b + c$. ¿Quién es mayor: a ó b ? Parece claro ¿no? Pues mira este razonamiento:
Si $a = b + c$, multiplico en ambos términos por $a - b$ y obtengo:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \quad (\text{¡Compruébalo!})$$

Paso ac a la izquierda y tengo

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

Divido entre $a - b - c$ y concluyo

$$a = b.$$

2. Ahora $1 = 2$. En efecto:
Supón que $b = a$. Entonces

$$ab = a^2; \quad ab - b^2 = a^2 - b^2; \quad b(a - b) = (a + b)(a - b); \quad b = a + b; \quad b = 2b; \quad 1 = 2.$$

3. Pero no solamente $1 = 2$, sino que todos los enteros positivos son iguales. Comprueba que las igualdades que vienen ahora son verdaderas:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-1} &= 1; & \frac{x^2-1}{x-1} &= x+1; & \frac{x^3-1}{x-1} &= x^2+x+1; \\ \frac{x^4-1}{x-1} &= x^3+x^2+x+1; \dots; & \frac{x^n-1}{x-1} &= x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1 \end{aligned}$$

Los primeros términos de cada igualdad tienen el mismo denominador, pero difieren en los numeradores, a saber: $x-1, x^2-1, x^3-1, \dots, x^n-1$.

Ahora bien, ¿hay algún valor de x para el que estos numeradores sean todos iguales? ¿Cuál? Escríbelo: _____. Así pues, para ese valor de x , los términos de la izquierda de las igualdades que has escrito son iguales; luego los de la derecha también serán iguales.

$$x+1, x^2+x+1, \dots, x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1.$$

Así pues $1 = 2 = 3 = 4 = \dots = n$.

4. Y si ya has resuelto ecuaciones, a ver qué pasa aquí:

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Haciendo operaciones en el primer miembro, llegamos a

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Simplificando

$$\frac{-4x + 40}{x - 7} = \frac{4x - 40}{13 - x}.$$

Cambiando el signo al numerador y denominador del término de la izquierda,

$$\frac{4x - 40}{7 - x} = \frac{4x - 40}{13 - x}$$

Si dos fracciones iguales tienen el mismo numerador, sus denominadores son iguales, es decir, $7 - x = 13 - x$, por lo que $7 = 13$ (Al fin y al cabo, no nos sorprende mucho: antes vimos que todos los enteros positivos eran iguales).