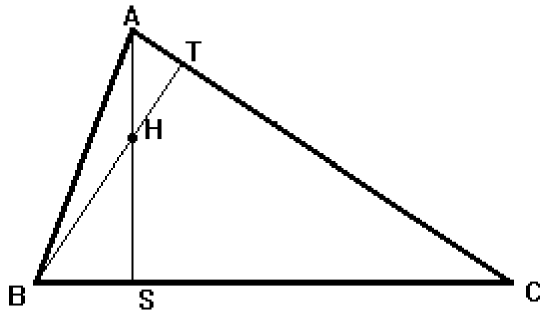
Ángulos que se forman con el ortocentro y los vértices

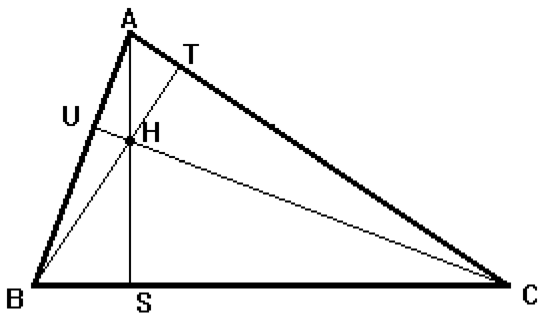
(Ejercicio sobre la igualdad de ángulos cuyos lados son perpendiculares)

1. Supongamos dibujadas en un triángulo **ABC** (de momento supondremos que es acutángulo) dos alturas.



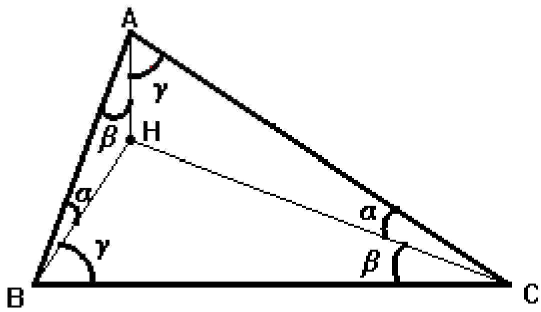
Los ángulos < CAS y < CBT son ………………. porque ambos son agudos y los lados de uno son perpendiculares a los del otro. (**CA** es perpendicular a …… y **AS** es perpendicular a …..).

2. Si dibujamos la tercera altura podemos hallar relaciones entre más ángulos. Incluso girando podemos jugar con las letras para completar la lista.



Teníamos que los ángulos < CAS y < CBT eran iguales. También lo son:
< ABT y < ACU (la primera letra se mantiene y la segunda y la tercera avanzan)
< ABU y < ………

3. Nos queda pues la siguiente situación:



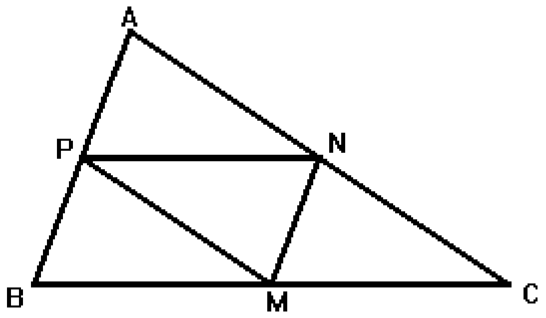
que es fácil de recordar si se miran los ángulos como focos de proyección sobre un segmento de un extremo **A** y otro uno de los vértices del triángulo.

Nivel B. Conocimientos previos: Condiciones de igualdad de ángulos a partir de sus lados. Líneas y puntos notables en un triángulo.

Nivel C. Estudio de la situación en el caso de obtusángulos.

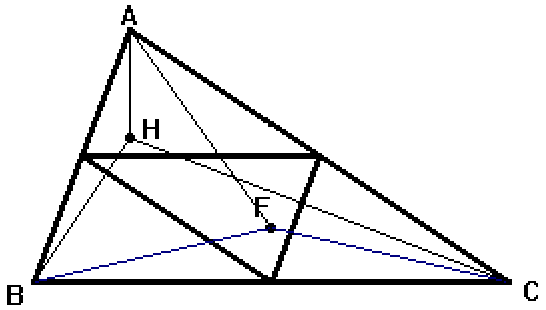
Ortocentro y circuncentro

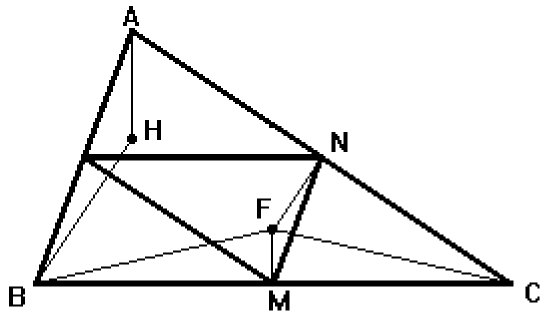
1. Dibujemos un triángulo **ABC** acutángulo escaleno y dentro de él, el triángulo que tiene como vértices los puntos medios de sus lados **M**, **P** y **N**.



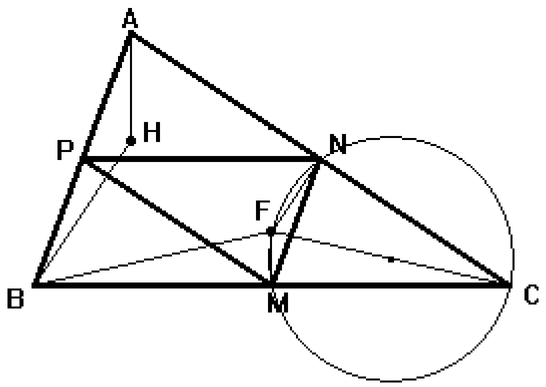
Ambos triángulos son ……………… siendo la razón de semejanza lineal igual a ……….. y la razón de áreas igual a …...

2. Una altura en el triángulo **MPN** es una ………………… en el triángulo **ABC**. Por tanto el ortocentro del triángulo **MNP** es el ……………………. del triángulo **ABC**.
3. Supongamos dibujados el ortocentro **H** y el circuncentro **F** del triángulo **ABC** . Vamos a desvelar la relación entre los ángulos que forman **H** y **F** con los vértices.





4. Observemos que como < **FMC** y < **FNC** son ángulos ………, entonces **M**,**C**, **N** y **F** están en una misma circunferencia,



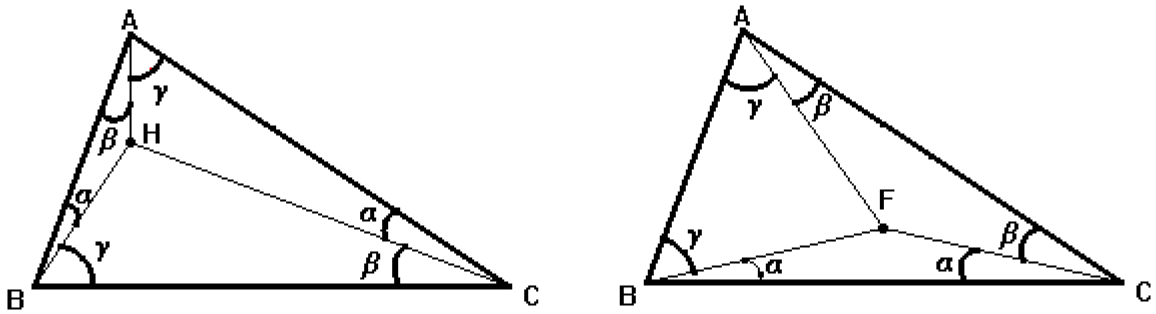
por lo que los ángulos < FMN y < FCN son ……………,
pero < FMN es igual a < BAH (¿por qué?). Análogamente bailando las letras:
< FNP = < FAP = < CBH
< F…. = < F …. = < …..H
Nivel C

Conocimientos previos: Ángulos inscritos. La circunferencia como lugar geométrico de los puntos que ven el diámetro bajo un ángulo de 90º.

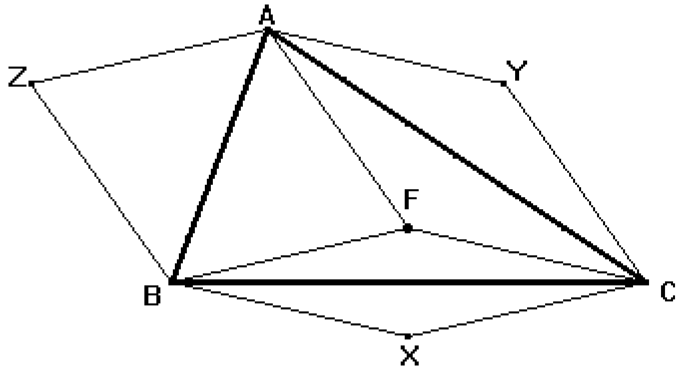
Ficha complementaria para el profesor

Se trata de dar mayor información sobre la más que notable relación entre ortocentro y circuncentro, dirigida a un alumno más motivado. La presentación puede hacerse con transparencias, donde se tengan dibujados los triángulos y los ángulos, o mejor aún con ordenador a través del programa CABRI.

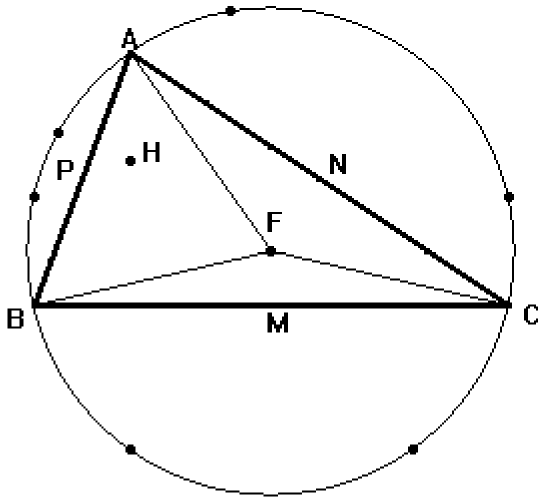
La situación en un triángulo acutángulo queda por tanto así:



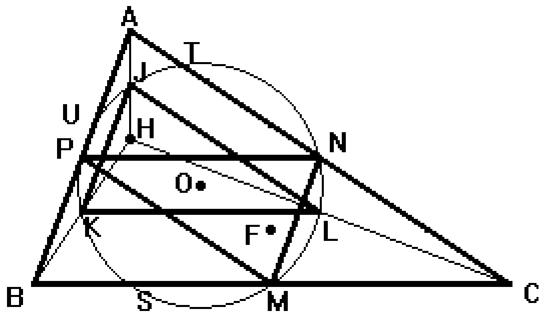
Si hallamos los puntos simétricos de **F** respecto de los lados del triángulo, obtenemos un hexágono de lados paralelos dos a dos.



Si hallamos los puntos simétricos de **H** respecto a los lados del triángulo y respecto a los puntos medios de éstos, todos ellos pertenecen a la circunferencia circunscrita.

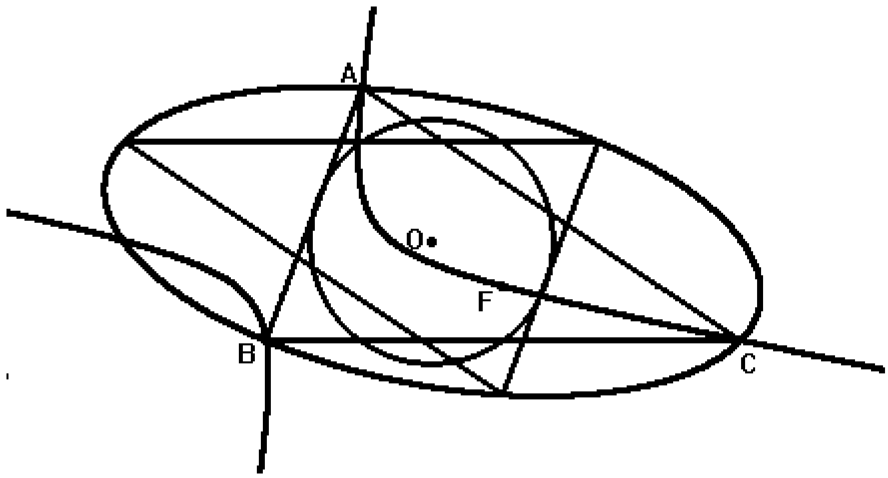


Esta circunferencia de nueve puntos es un preludio de "La circunferencia de los nueve puntos" o circunferencia de Feuerbach.



Circunferencia de Feuerbach
Pasa por los puntos medios de los lados: **M**, **N** y **P**; pasa por los pies de las alturas: **S**, **T** y **U**; y pasa por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices: **J**, **K** y **L**. Su centro **O** es el punto medio del Segmento **HF** y el centro de simetría del hexágono **AZBXCY**.

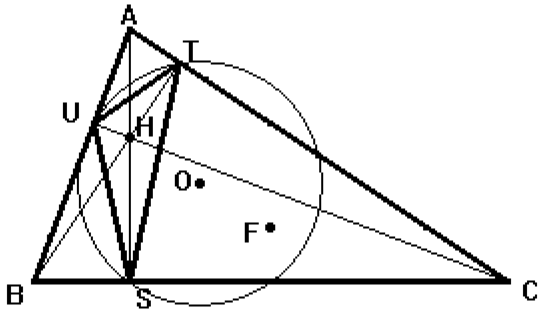
La cónica que pasa por los tres vértices de un triángulo, por su ortocentro y su circuncentro es una hipérbola equilátera, de asíntotas paralelas a los ejes de la elipse circunscrita a nuestro hexágono **AZBXCY**, aunque no de igual centro.



Y aún más relaciones

Si consideramos el triángulo órtico del triángulo **ABC** (triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas **S**, **T** y **U**) tenemos que **H** es el incentro del triángulo órtico (las alturas de **ABC** son las bisectrices de su triángulo órtico) y que los ángulos de éste son:

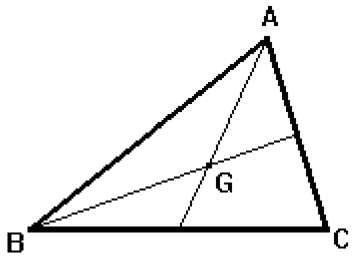
$$\mathbf{S = 2\alpha;\quad T = 2\beta;\quad U = 2\gamma}.$$



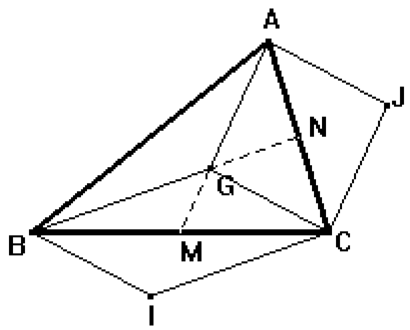
El baricentro: su posición en las mediana

(Se trata de dar una explicación sencilla de la situación del baricentro en la mediana. Este hecho se suele demostrar con coordenadas de puntos y vectores, pero casi nunca con geometría elemental. Es un ejercicio que se puede desarrollar sobre papel cuadriculado, teniendo la astucia de que las sumas de las “coordenadas” de los vértices sean múltiplos de tres).

1. Dibujemos un triángulo **ABC** y dos de sus medianas que se cortan en un punto **G**.



2. Hallamos los puntos simétricos de **G** respecto a los puntos medios **M** y **N**., obteniendo los cuadriláteros **GBIC** y **GCJA** que son ………………… ya que sus diagonales se cortan en sus puntos medios.

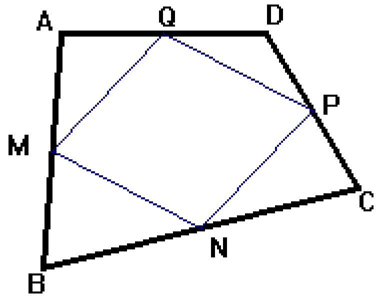


3. En el dibujo descubrimos nuevos paralelogramos. Como **IC** es paralelo a **BG**, entonces lo es a su continuación **GJ** . Como **JC** es paralelo a **AG**, lo es a su continuación **GI**. Por tanto el cuadrilátero **GICJ** es también paralelogramo. De las igualdades **JC** = **AG** = **GI** , deducimos que **AG** = 2 **GM** o lo que es lo mismo **AG** = $\frac{2}{3}$ **AM** . De igual manera se deduce que **BG** = $\frac{2}{3}$ **BN**. Deducimos también que la posición de G en una mediana es independiente de cuál sea la otra mediana que la corte y por tanto las tres medianas se cortan en un único punto.

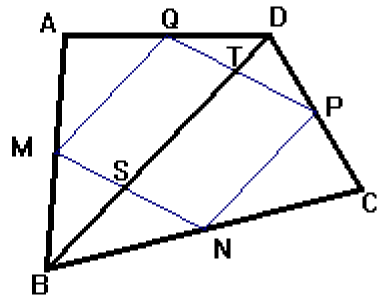
Sobre cuadriláteros y puntos medios

Ficha guía para el profesor: Se ofrecen las pautas que el profesor debe marcar a sus alumnos. Buen ejercicio para trabajar en papel cuadriculado. Para ello se aconseja que todas las primeras "coordenadas" tengan la misma paridad, y lo mismo las segundas.

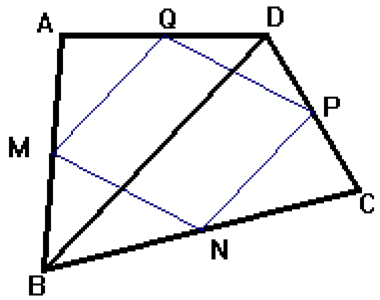
1. Dibujemos un cuadrilátero convexo **ABCD** y marquemos sobre los lados sus puntos medios **M**, **N**, **P** y **Q**.



2. El cuadrilátero **MNPQ** resulta ser siempre paralelogramo. En efecto tracemos la diagonal **BD**:



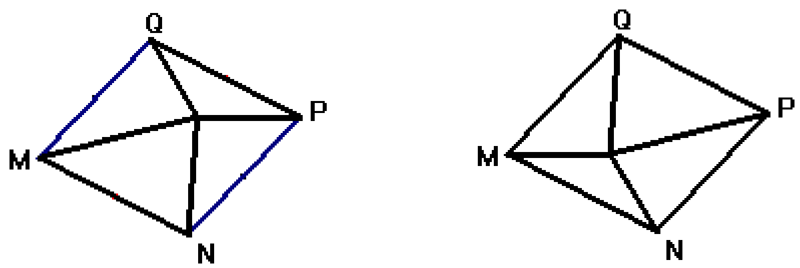
En el triángulo **ABD** el segmento **MQ** es la paralela media a la base **BD** y por tanto **MQ** y **BD** son paralelos. Lo mismo ocurre con **NP**. Y cambiando después a la otra diagonal **AC**, obtenemos con iguales razonamientos el paralelismo de **MN** y **QP**.



3. Pero también podemos decir algo de áreas. El área del cuadrilátero **MNPQ** es el doble del área del paralelogramo **MNPQ**.

Razona el resultado usando el teorema de Tales y las fórmulas de áreas en los triángulos **ABD** y **CDB,** y en sus paralelogramos inscritos **MSTQ** y **PTSN**.

4. Y aún más, recorta los triángulos **AMQ**, **BNM**, **CNP** y **DPQ**, y rellena con ellos el paralelogramo **MNPQ**.



(Dos soluciones distintas. ¿Qué simetrías actúan sobre las piezas?