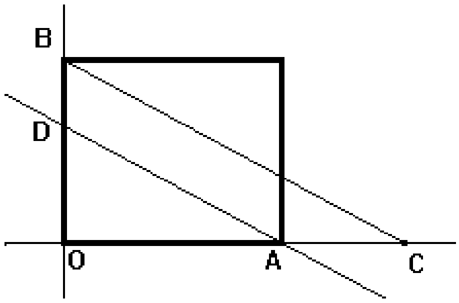
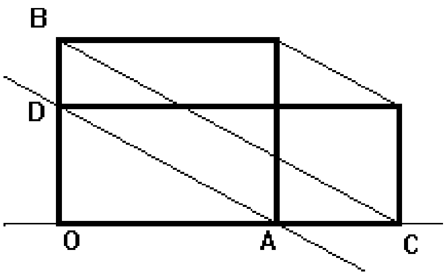
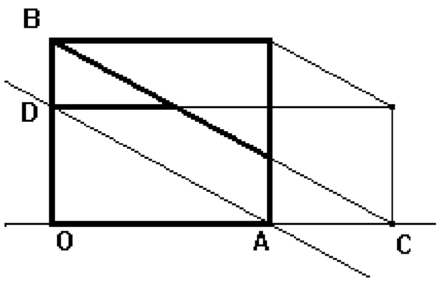
Rectángulos equivalentes
Se trata de conseguir un rectángulo equivalente (de igual área) a otro teniendo uno de sus lados dado. La construcción consiste en un ejercicio simple de trazado de paralelas:



• Dado el rectángulo de la figura y dado el punto **C** tenemos que hallar el punto **D**, de forma que el rectángulo de vértices **O**, **B** y **C** sea equivalente al primero. Unimos **B** con **C** por **A** trazamos una paralela a **BC**, obteniendo por corte el punto **D.**

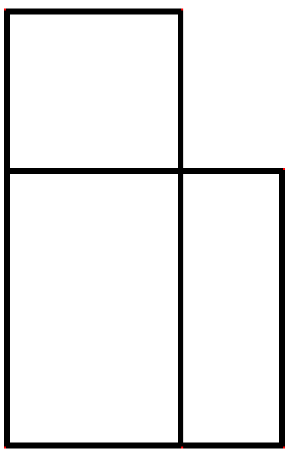


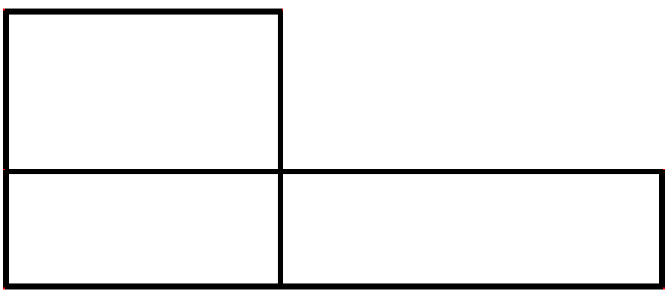
• Comprueba usando el teorema de Tales que los dos rectángulos tienen igual área.
Además toda la figura está impregnada de la razón de semejanza a través de la dirección de paralelismo trazada. Ello permite trocear un rectángulo y convertirlo en el otro:



• En este caso el puzle se resuelve con tres piezas. ¿Lo ves?
El número de piezas del puzle depende del tamaño relativo de los lados de uno y otro rectángulo. Nos bastarán tres piezas si el lado mayor de uno es menor que el doble del menor del otro; cuatro piezas si es mayor que el doble y menor del triple; .... ♣ ¿Por qué? ¿Cuántas si es exactamente el doble? ¿Y el triple?

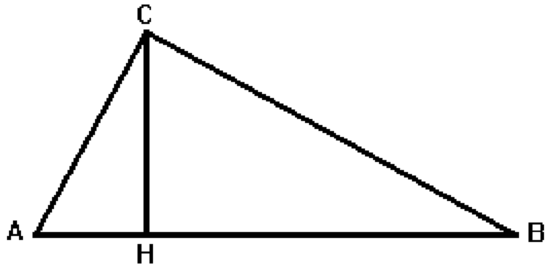
Resuelve con escuadra y cartabón los siguientes puzles:
Trocea el cuadrado para conseguir cada rectángulo.



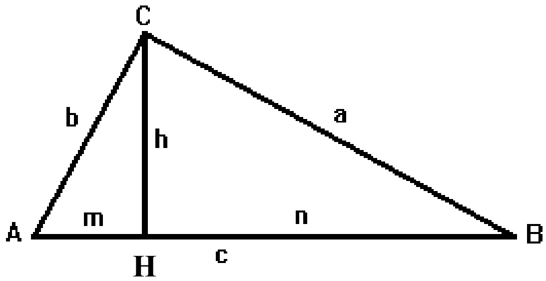


Los teoremas del triángulo rectángulo a partir de la semejanza

• Dibuja un triángulo rectángulo que tenga por base su hipotenusa y traza la altura sobre la hipotenusa. ¿Sabes hacerlo? (si tienes dudas pregunta a tu profesor).



Pongamos nombres adecuados a vértices y segmentos:



• En la figura se ven tres triángulos. ¿Eres capaz de demostrar que son semejantes basándote en sus ángulos?

El teorema de la altura nace de la aplicación de la semejanza entre el triángulo de la izquierda (**AHC**) y el de la derecha (**BHC**). En efecto, establece con las letras dadas la proporción entre los catetos de ambos triángulos:

$$\frac{\text{cateto mayor de AHC}}{\text{cateto menor de AHC}} = \frac{\text{cateto mayor de BHC}}{\text{cateto menor de BHC}}$$

Ensaya cómo se enuncia el teorema de la altura.

El teorema del cateto nace de la aplicación de la semejanza entre las hipotenusas y lado común del triángulo pequeño y el grande inicial.

$$\frac{\text{hipotenusa de AHC}}{\text{cateto menor de AHC}} = \frac{\text{hipotenusa de ABC}}{\text{cateto menor de ABC}}$$,para el cateto b,

$$\frac{\text{hipotenusa de BHC}}{\text{cateto mayor de BHC}} = \frac{\text{hipotenusa de ABC}}{\text{cateto mayor de ABC}}$$, para el cateto a.

Reescribe con las letras dadas estas dos últimas proporciones.

Ensaya como se enuncia el teorema del cateto.

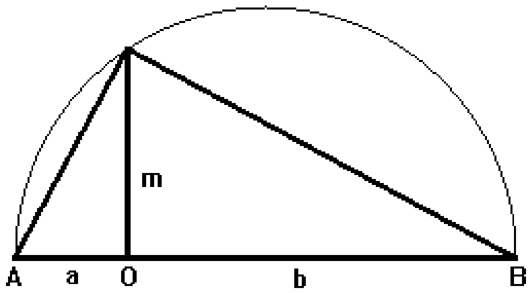
Sumando las expresiones de los cuadrados de los catetos obtenidas anteriormente, se obtiene el teorema de Pitágoras. Hazlo.

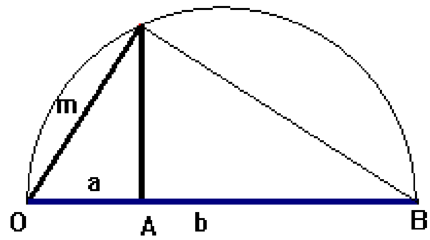
Cálculo geométrico de la media geométrica

Presentamos a continuación cuatro formas de obtener la media geométrica **m** = $\sqrt{a.b}$ de dos medidas **a** y **b** (en todas ellas **OA** = **a**, **OB** = **b**).

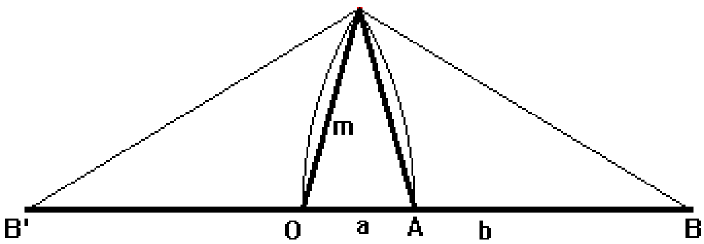
• Las dos primeras corresponden a dos teoremas del triángulo rectángulo. ¿Cuáles?

En la primera se observa que la media geométrica es siempre más pequeña o igual que la media aritmética $\mathbf{\frac{a+b}{2}}$ ¿ Qué es lo que mide $\mathbf{\frac{a+b}{2}}$ en ese dibujo? También podemos ver en el dibujo que la media geométrica castiga la mayor desigualdad de **a** y **b**. ¿Lo ves?



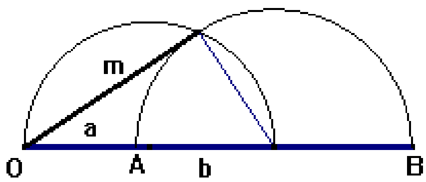


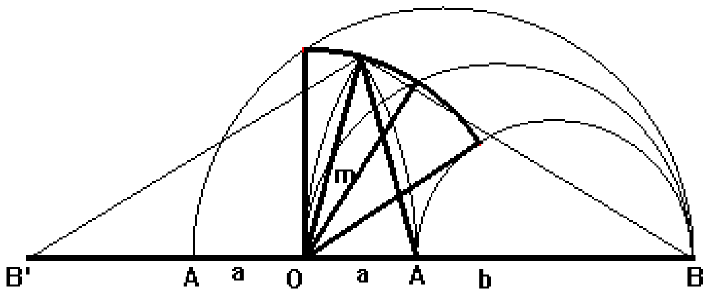
La tercera construcción está basada en la semejanza de triángulos



En el dibujo podemos observar tres triángulo isósceles (**AB’** = **b**), dos iguales y uno semejante. Demuestra que es semejante (es fácil). Aplica entonces la proporcionalidad de los lados y tendrás despejando que **m** es la media geométrica.

♣ El siguiente dibujo es una consecuencia inmediata de la potencia de un punto respecto a una circunferencia, pero a lo mejor eso no te lo han contado todavía. Vamos a razonarlo. El triángulo es rectángulo ya que está inscrito en una semicircunferencia. Entonces $\mathbf{m^2}$ es diferencia de cuadrados (hipotenusa al cuadrado menos cateto al cuadrado), es decir suma por diferencia. Pero ¿cuánto suman la hipotenusa y el cateto? ¿Cuál es la diferencia de hipotenusa menos cateto? ¡Ajá!

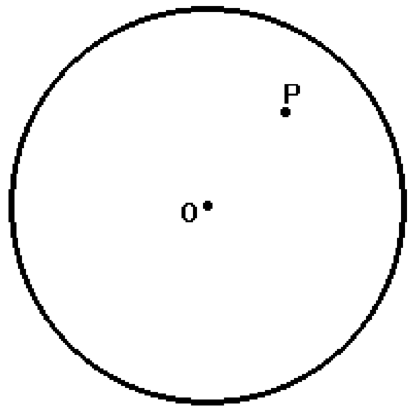




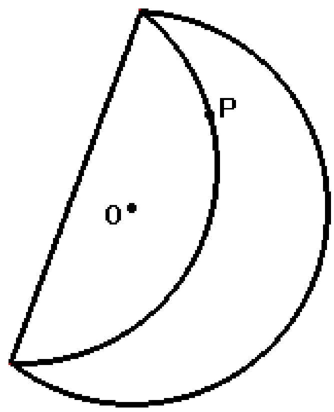
Las cuatro construcciones juntas

Construcción de cónicas a partir de rectas tangentes (como envolventes)

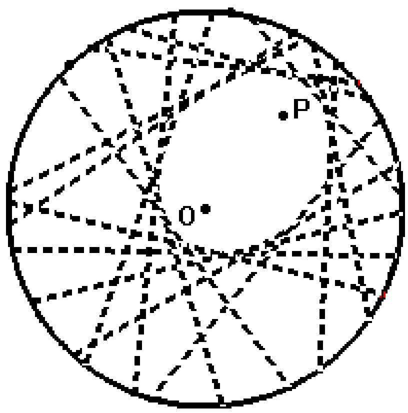
Elipse



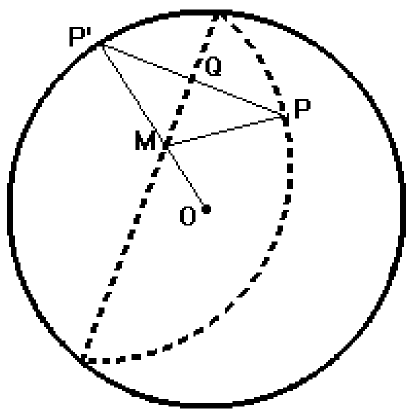
- Coge una hoja Dina 4 y dibuja dentro una circunferencia grande. Recorta el círculo y marca un punto **P** un poco más cerca del borde que del centro **O**. Marca el punto y el centro por los dos lados, para facilitar la visión al doblar.



- Dobla el círculo de forma que la circunferencia pase por **P** y desdobla. Repite la operación variando el doblez de forma que vaya girando por los puntos de la circunferencia. Con un lápiz marca esos dobleces y verás como van delimitando una elipse.



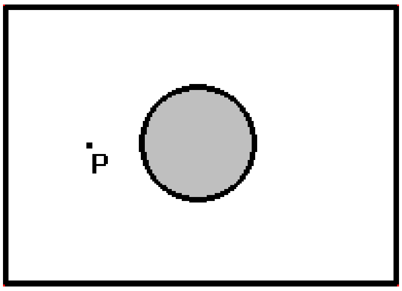
- ¿Cuáles son sus focos?¿Cuál su centro?
- Si el radio de la circunferencia es **r** y la distancia de **P** a **O** es **d**, ¿cuál es la distancia focal?, ¿cuánto mide el semieje mayor?. Con esos datos calcula el semieje menor.



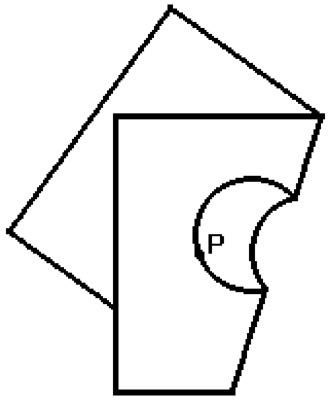
♣ Para probar que esas rectas definen una elipse fijémonos en un doblez. Marca el punto **P’** que al doblar cae sobre **P** y desdobla. Une con bolígrafo **P’** con el centro (así **OP’** = **r**) y llama **M** al punto de intersección de **OP’** con la línea marcada por el doblez. ¿Cuánto suma **OM** + **MP**? (De paso esto demuestra que M es el punto de la elipse y la recta del doblez la tangente en ese punto. ¿Concuerda tu apreciación anterior del semieje mayor con la suma de las distancias de M a los focos?

Hipérbola

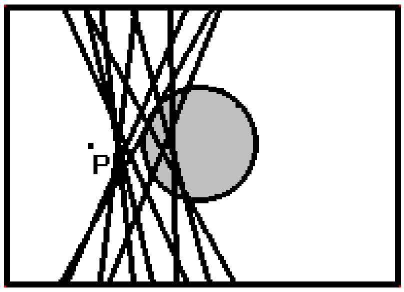
• Coge una hoja Dina 4 y, pinchando más o menos en el centro de la hoja, dibuja una circunferencia de unos 5 cm de radio. Separa cortando el círculo, y dejando intacto el resto de la hoja (te recomendamos que dobles el papel pasando por el centro de la circunferencia y recortes por la línea de semicircunferencia). Marca un punto de la hoja agujereada que esté a unos 2 cm de la circunferencia y a medio camino entre los lados largos de la hoja.



Dobla ahora la circunferencia y hazla pasar por **P**.



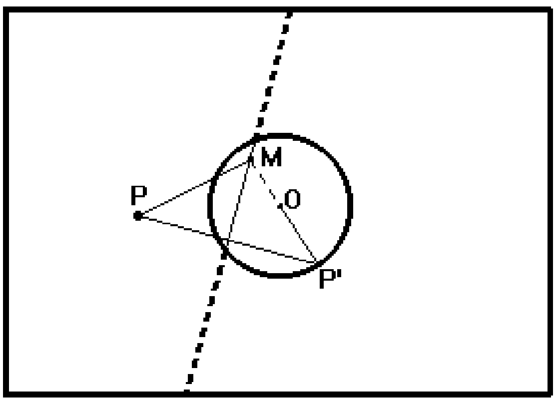
Desdobla y marca el doblez con un lápiz. Haz nuevos dobleces de la misma forma, girando el doblez alrededor de la circunferencia.



Vemos aparecer una hipérbola (naturalmente los trozos de línea sobre el agujero no los verás)

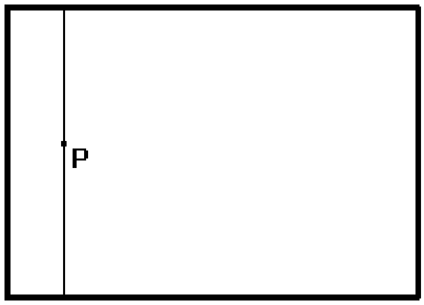
- ¿Cuáles son sus focos?¿Cuál su centro?
- Si el radio de la circunferencia es **r** y la distancia de **P** a **O** es **d**, ¿cuál es la distancia focal?, ¿cuánto mide el semieje real?. Con esos datos calcula el semieje imaginario..

♣ Probemos ahora que esas rectas definen una hipérbola. Recuperemos primero nuestro círculo para poder tener el centro. Fijémonos en un doblez. Marca el punto **P’** que al doblar cae sobre **P** y desdobla. Une con bolígrafo **P’** con el centro (así **OP’** = **r**) y prolonga la línea hasta cortar a la línea del doblez llamando **M** al punto de intersección. ¿Cuánto mide **MP** – **MO**? Así, ¿cuánto mide el semieje real? ¿Concuerda esto con tu apreciación anterior?

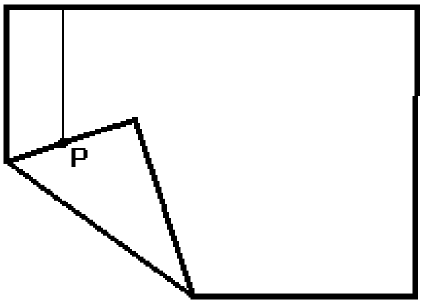


Parábola

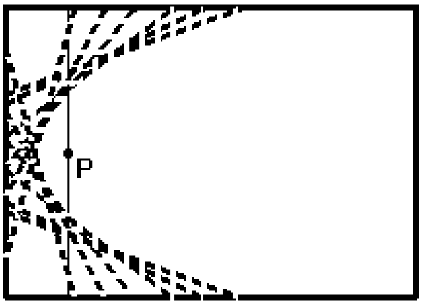
• Coge una rectangular y a unos 3 cm de uno de los lados menores traza una paralela a éste. Toma un punto **P** sobre esa recta más o menos centrado.



Dobla la hoja de forma que el lado señalado pase por el punto **P**.

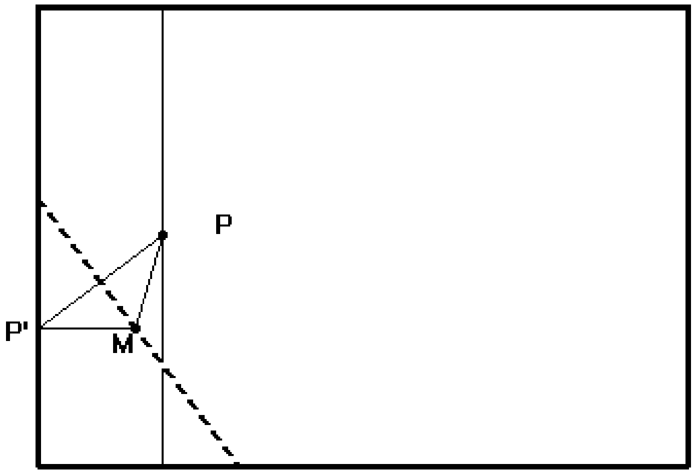


Desdobla y marca con lápiz el doblez. Repite y dibuja los dobleces variando el punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro.



Vemos como se va delimitando una parábola.

- ¿Cuál es su foco? ¿Cuál su eje? ¿Cuál su vértice?
- Demostremos que efectivamente obtenemos una parábola. Fijémonos en un doblez. Marquemos en el lado el punto **P'** que al doblar cae sobre **P** y desdoblemos.



Desde P' trazamos una paralela al lado hasta cortar al doblez en el punto **M**. Es claro que la longitud de **MP** es igual a la de **MP`**, pero esta última es la distancia de **M** al lado.

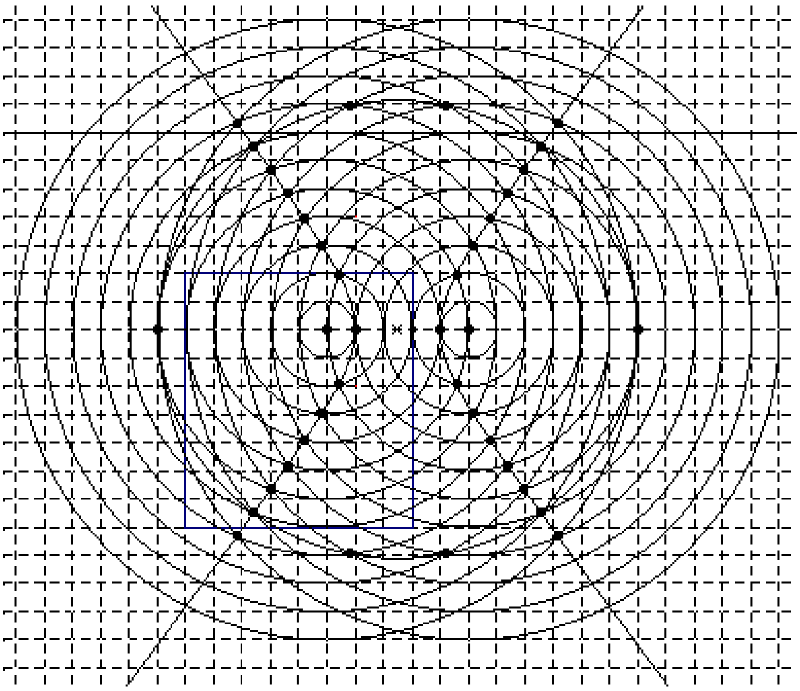
(Las tres construcciones de esta actividad están basadas en las propiedades ópticas de las cónicas)

Trazado de cónicas por puntos

(Aunque con instrumentos de dibujo bastaría, es mejor realizar la actividad sobre papel cuadriculado con cuadrícula de medio centímetro para poder partir de una unidad de medida)

Elipses e hipérbolas

• Tómense dos puntos del interior de la misma línea separados cinco cuadrículas. Con centro en ellos y radios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 y 11 cuadrículas trazamos dos series de circunferencias concéntricas.



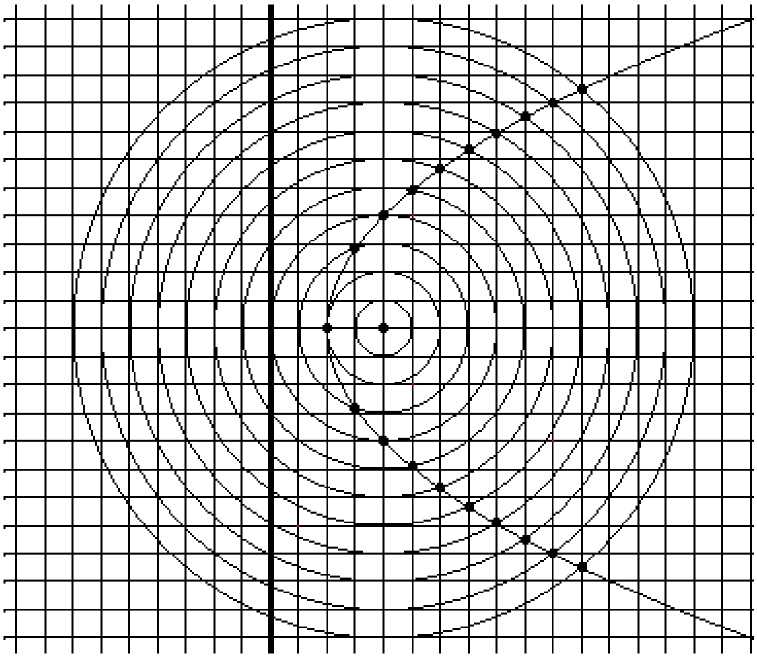
• Queremos localizar puntos intersección de circunferencias cuya suma de distancias a los dos centros sea 7. Si de la primera distan 2, ¿cuánto distan de la segunda? ¿En qué figura geométrica están situados esos puntos? ¿Qué elementos notables reconoces? ¿Cuántos de esos puntos localizas en el dibujo?

¿Y si la suma es 8? ¿Y si es 4? ¿Quiénes son todos los puntos cuya suma de distancias a los centros es 5?

• Y ahora localiza los puntos intersección de nuestras circunferencias cuya diferencia de distancias a los centros sea 3. Si uno dista de la primera circunferencia 4, ¿cuánto dista de la segunda?. ¿En qué figura geométrica están situados esos puntos? ¿Qué elementos notables reconoces? ¿Cuántos de esos puntos hay en tu dibujo? ¿ Y si la diferencia es 4? ¿Y si la diferencia es 2? ¿Y si la diferencia es 0?

Parábolas

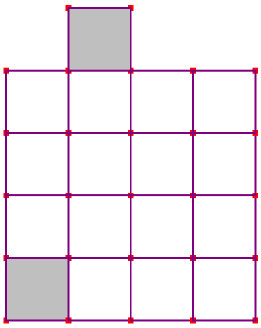
• Tomamos un punto de la cuadrícula y trazamos circunferencias con centro ese punto y radios 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 cuadrículas. Consideramos una recta a la izquierda del punto a distancia de cuatro cuadrículas. • Busca los puntos intersección de circunferncias y cuadrícula que distan lo mismo de la recta y del punto. ¿Cuántos encuentras? ¿En qué figura geométrica están situados? ¿Qué elementos notables reconoces?. Mueve la recta a distancia 2 del punto. ¿Hay más puntos en tu dibujo? ¿Qué pasa si el punto está en la recta?



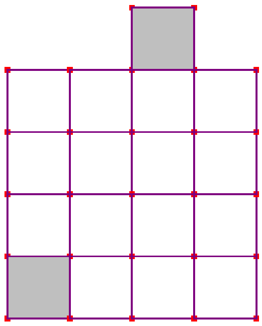
Desarrollos planos del cubo

Se trata de obtener todos los posibles desarrollos del cubo. Es decir, buscar figuras planas de seis cuadrados iguales, tales que cualquiera de ellos esté conectado por una arista a alguno de los otros y que la figura se pueda doblar en el espacio, formando con ella un cubo con esos cuadrados como caras. Si prescindimos de las simetrías el número de desarrollos es 11. Queremos que seas ordenado en la búsqueda para que no te olvides de ninguno.

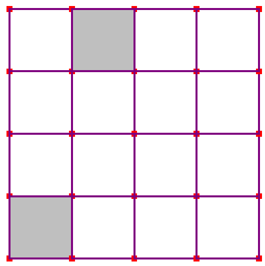
• Empieza descartando que haya cinco cuadrados en una fila (¡fácil!). Encuentra el único desarrollo que no cabe en un cuadrado 4 x 4. • Razona entonces que los demás deben poderse meter en un rectángulo 3 x 4 pero no en uno 2 x 4. Piensa ahora en tres filas y juega con el nº de cuadrados de la central. Las siguientes preguntas guiarán tu búsqueda:



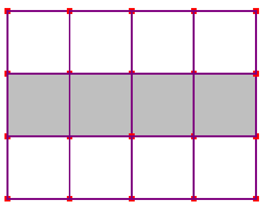
Para conectar los cuadrados sombreados mediante cuadrados con una arista común, ¿cuántos como mínimo necesitas? ¿Cuál es la única solución que constituye un desarrollo del cubo?

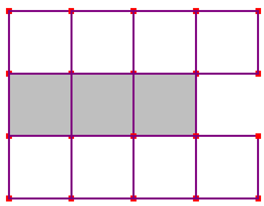


♣ Para “conectar” dos cuadrados, uno de la fila 1ª y otro de la fila 4ª, empleo como mínimo …… cuadrados. En ese caso están en la ……….. columna. Colocando los dos que me quedan ocuparía como mucho …. Columnas. Si los de la fila 1ª y 4ª están en columnas contiguas, ¿cuántos cuadrados necesito para conectar?. Completando hasta los seis, ¿cuántas columnas ocuparía? ¿Y si se diferencian en dos columnas?

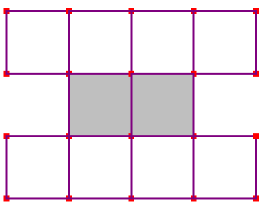


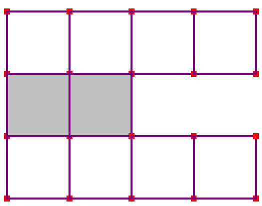
• ¿Cuántos desarrollos (salvo simetrías) metidos en un rectángulo 3 x 4 con cuatro cuadrados en la fila central?
• ¿Con tres?

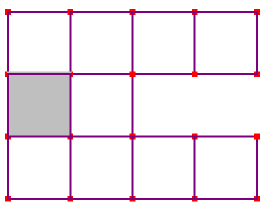


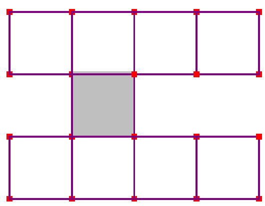


• ¿Y con dos o con uno?

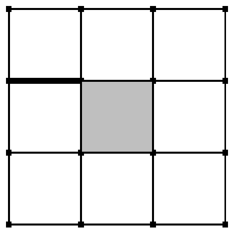








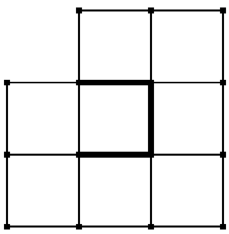
• Fabrícate un cuadrado agujereado como el de la figura formado por 8 cuadrados iguales:



• Si por la línea gruesa cortamos la pieza hasta conectar con el interior obtenemos una cadena abierta de 8 cuadrados que puede ser plegada (sólo por aristas de éstos) en forma de cubo (naturalmente dos caras aparecerán dobles). Numerando los 8 cuadrados por una cara, o dándolas color, se puede conseguir que en el cubo resultante se vean todas las caras con numeración o todas coloreadas.

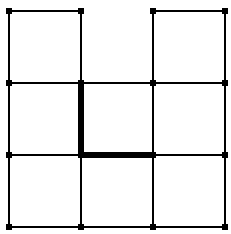
Indicación: Antes de darle forma tridimensional, busca plegarla con forma plana que corresponda a un desarrollo del cubo, y donde las seis caras del desarrollo se vean numeradas o con color.

Repetimos la actividad con la nueva figura:



Corta ahora por las líneas de trazo grueso. Obtendrás una pulsera abierta de ocho cuadrados ahora en forma espiral. Consigue darla forma de cubo.

Y por último con la tercera figura:

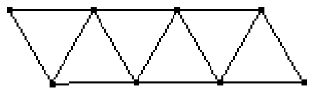


Desarrollos planos del tetraedro y del octaedro

No diremos nada del tetraedro (sólo hay dos). • ¡Encuéntralos!

Para el octaedro será importante disponer de piezas encajables con forma de triángulo equilátero (al menos ocho), pues nuestra visión y experiencia está poco preparada para decidir si la forma plana se doblará formando un octaedro. Será también importante disponer de una trama de puntos equilátera para poder representar los desarrollos que encontremos válidos y compararlos para ver si son simétricos con los ya encontrados. Una forma de encontrar ordenadamente los 10 desarrollos posibles (salvo simetrías) es pensar en las bandas máximas de triángulos cruzados que puede tener el desarrollo.

Con una banda de 6 triángulos como ésta:

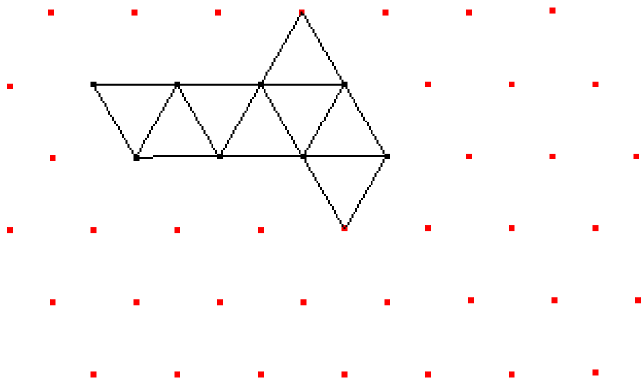


Tenemos que al doblarse para formar un octaedro se forma un cinturón cerrado, al que sólo falta poner un triángulo por arriba y otro por abajo para obtener un octaedro.

Con ello se prueba que no puede haber bandas de éstas con más de seis triángulos.

• Busca y comprueba los "diferentes" desarrollos (hay seis) con un triángulo más arriba y otro más abajo, y los vas representando en la trama.

Ten el primero:



Ahora con bandas máximas de cinco. También esos cinco triángulos al doblarlos para formar un octaedro adquieren la forma de cinturón sin cerrar, teniendo que añadir dos triángulos por arriba (uno como tapa y otro para cerrar el cinturón) y uno por abajo (como tapa). No se consiguen figuras nuevas (hay 3) invirtiendo el papel de arriba y abajo. (Recuerda antes de ver si las figuras pueden formar un octaedro que en un vértice del desarrollo plano no puede haber más de cuatro triángulos.

• Con bandas máximas de cuatro y ocho triángulos sólo hay una posibilidad que además funciona.

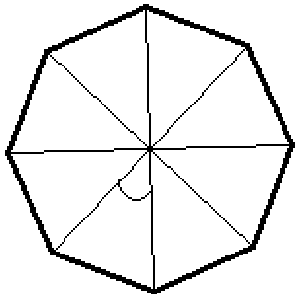
♣ Con 8 triángulos no hay bandas máximas de tres triángulos.

Revisa los diseños que has trasplantado a la trama y señala los cuatro con simetría central y el único con simetría axial.

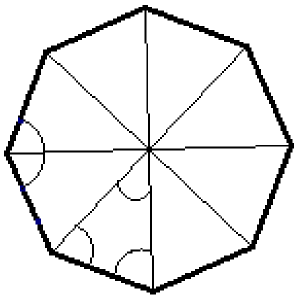
Sobre polígonos regulares

• Ángulo interior de un polígono regular. Todos sabemos enseguida calcular por la regularidad el ángulo central de un polígono regular. En efecto, por la no distinción de ángulos ni lados, los triángulos que se forman uniendo el centro con los vértices son todos iguales, y por tanto el central es un ángulo de reparto. Hay que repartir 360º entre el número de lados.

Así el ángulo central del eneágono regular mide ………



• El ángulo interior de un polígono regular es también fácil de calcular, aunque ya no es un ángulo de repartición. Deduce su cálculo de la figura:



¿Cuánto suman los dos nuevos ángulos dibujados en el triángulo donde habíamos dibujado un ángulo central?
¿Cómo son cada uno de los triángulos?
¿Cuánto mide el ángulo interior dibujado?

Asocia siempre este dibujo al cálculo del ángulo interior de un polígono y extrae rápidamente su consecuencia:

El ángulo interior de un polígono regular es suplementario del central

• Rellena la tabla para los 22 polígonos regulares que tienen ángulo central divisor exacto de 360 º

Polígono Regular de n lados	Ängulo central	Ängulo interior
n = 3	120º	60º
n = 4	90º	90º
n = 5	72º	108º
n = 6		
n = 8		

(Completa la tabla tomando como valor de n cada uno de los 22 (n > 2) divisores válidos de 360º)

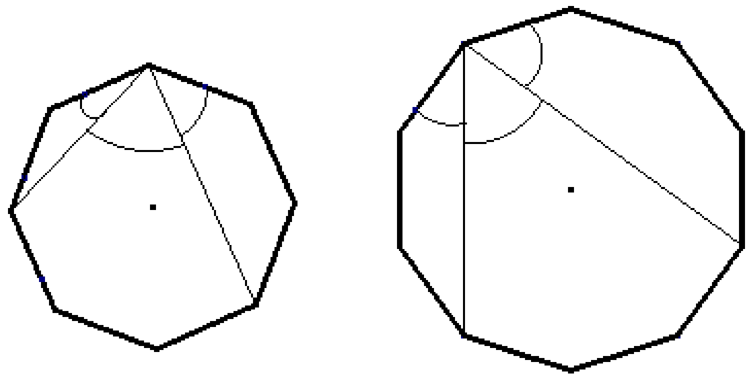
El ángulo central de un polígono regular disminuye (a saltos) con el número de lados. Su valor más grande es …… y puede ser tan pequeño como queramos. ¿Qué pasa con el interior?

• Una circunferencia es de alguna forma un polígono regular de infinitos lados. Según esa idea ¿cuál sería el valor del ángulo central de ese polígono? ¿Y cuál sería el ángulo interior?

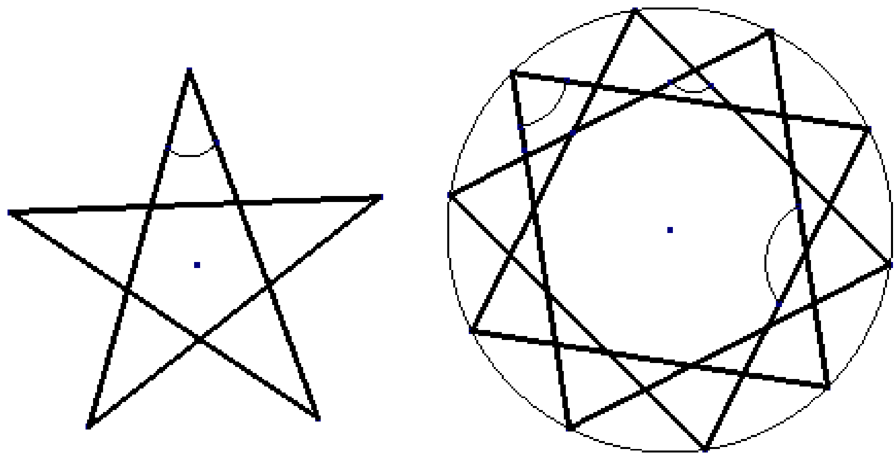
Otros ángulos en polígonos regulares

• A un polígono regular hay que asociarle siempre el centro y las circunferencias inscrita y circunscrita. Así podemos calcular otros ángulos relacionados sobretodo con la segunda circunferencia.

¿Cuánto miden los ángulos señalados? (Piensa en ángulos inscritos)



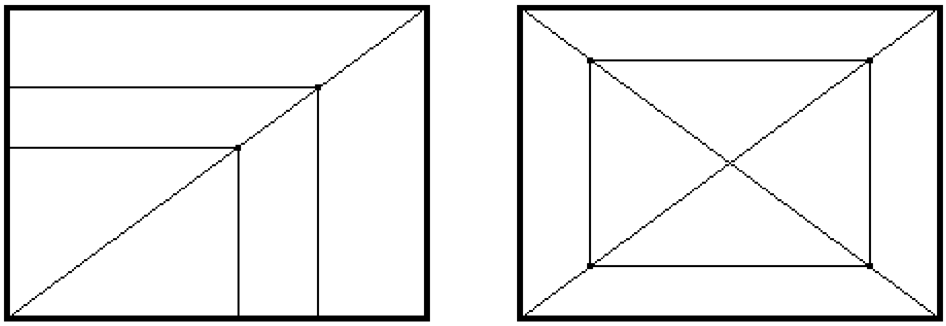
♣ Estas mismas ideas las podemos llevar a estrellas y polígonos estrellados regulares:



¿Cuánto miden los ángulos señalados en las figuras? ¡Cuidado con los de la segunda! Dos de los ángulos no son inscritos a la circunferencia visible, sino interiores. Puedes calcularlos mediante la fórmula que relaciona ángulos interiores con los arcos que abarcan, o si no la has dado viéndolos como inscritos a circunferencias que deberás dibujar? Puedes también medirlos con un transportador primero y luego intentar llegar al resultado razonando.

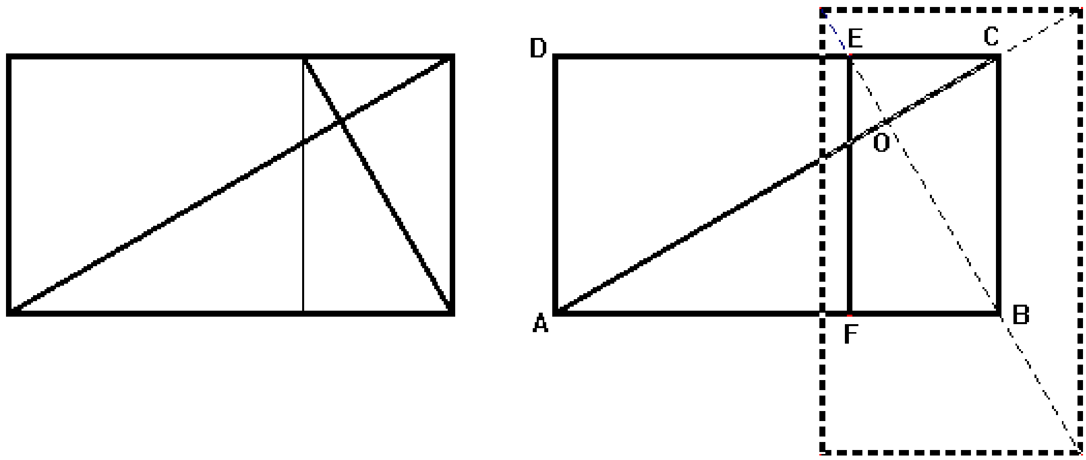
Creación de rectángulos semejantes

• Una forma fácil de obtener rectángulos semejantes es a través de paralelas, utilizando de apoyo sus diagonales. Sin embargo el método es poco dinámico:

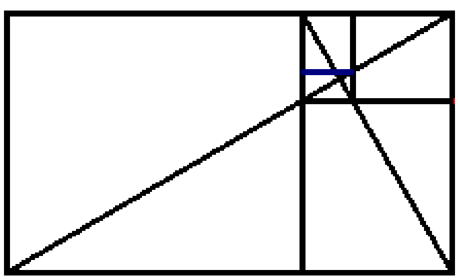


• Otra idea es trazar una diagonal y por uno de los otros dos vértices trazar una perpendicular a ésta. Esta última línea resulta diagonal de un rectángulo semejante al de partida. ¿Por qué? (Razona que los triángulos mitades son semejantes)

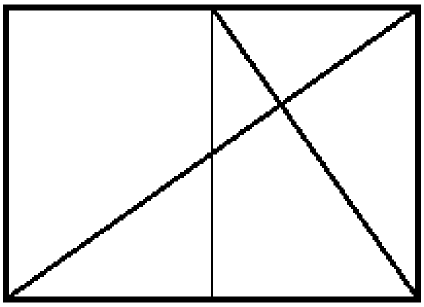
♣ (Este rectángulo semejante se puede obtener también girando desde **O** el rectángulo de partida y luego aplicando una contracción hacia **O** de razón **AD** : **AB**)

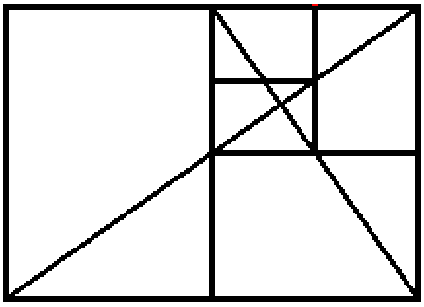


• El dibujo está preparado para aplicarle reiteradamente el proceso sin dibujar nuevas diagonales, obteniéndose una serie de rectángulos semejantes menguantes hacia **O**.

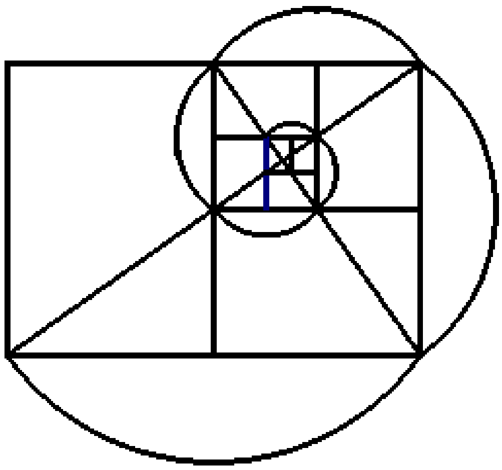


- **Apliquemos el procedimiento a nuestra hoja Dina 4:**



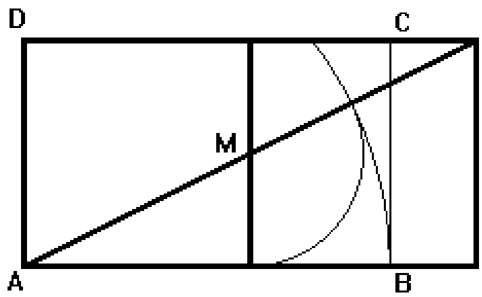


Si trazamos la diagonal de la hoja y luego la perpendicular, obtenemos que ésta corta en el punto medio del lado largo, ello es debido a que la hoja Dina 4 cuando la dividimos en dos rectángulos iguales, éstos resultan semejantes al de partida (dando el tamaño Dina 5). Esta es una buena idea a la hora de elegir papel para hacer fotocopias. Si yo quiero hacer una copia al doble de tamaño en área (así se entiende al decir "hágamela al doble de tamaño") de algo enmarcado en una hoja Dina 4, meteré en la máquina papel Dina 3, y obtendré la fotocopia ajustada al nuevo tamaño, según lo estaba en el original. Si la razón de las áreas de Dina 4 a Dina 3 es 2, •¿cuál es la razón de semejanza de los lados? ¿Cuál es la razón entre los lados de tu hoja Dina 4? Mide los lados y con calculadora obtén esa razón.
La división reiterada permite en este caso ajustar a la figura una espiral (seudoespiral logarítmica, realizada a base de cuartos de circunferencia) de polo **O**. ¿Cuáles son sus centros ?



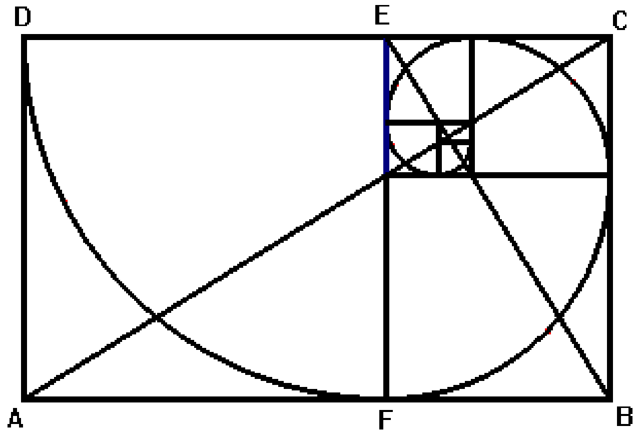
Los cuartos de circunferencia no encajan demasiado bien, obtenemos una visión de espiral floreada (en absoluto desagradable). Si hubiéramos partido de un rectángulo áureo la conexión sería suave.

- Podríamos definir un rectángulo áureo como aquél en que al trazar la perpendicular a la diagonal, no el rectángulo semejante que se obtiene, sino el complementario es un cuadrado.



Construcción de un rectángulo áureo **ABCD** a partir de dos cuadrados. M y A son los centros de los arcos trazados.

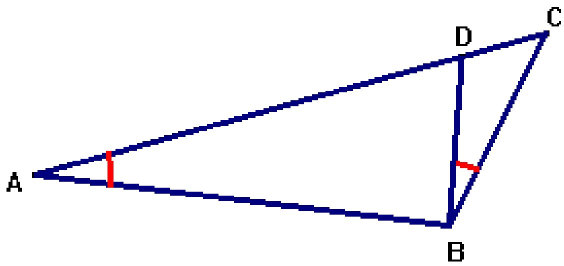
Creación de rectángulos semejantes

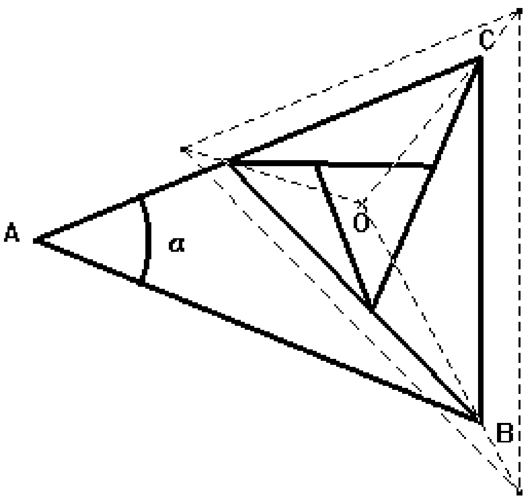


♣ Así queda la construcción en un rectángulo áureo. La existencia de los cuadrados permite que los cuartos de circunferencia se peguen con suavidad. ¿Cuáles son ahora los centros? Usando la semejanza de los dos primeros cuadrados demuestra que **AF**^{2} = **AB . BF**

Creación de triángulos semejantes

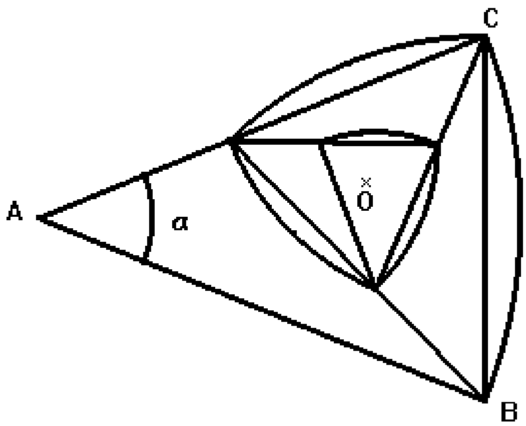
• Observa este procedimiento para obtener triángulos semejantes. Demuestra que si los dos ángulos marcados son iguales los dos triángulos son semejantes. El proceso puede ser reiterado pero lo vamos ya a hacer en triángulos isósceles.



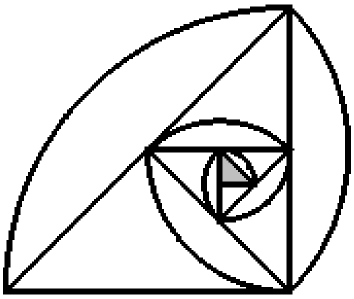


• Si esta construcción de triángulos interiores semejantes sigue un sentido de rotación, obtenemos una serie de triángulos menguantes que se enrollan hacia un punto **O**. Así el nuevo triángulo aparece también como giro de centro **O** del triángulo anterior y una contracción hacia **O** de razón **BC** : **AB**
Ésa es también la razón de semejanza de dos triángulos semejantes consecutivos.

• Hay pues un claro paralelismo entre esta construcción y la anterior de rectángulos. La condición de isósceles hace fácil asociar una seudoespiral a la figura. (Dicha seudoespiral proporciona a su vez un método de construcción de la figura)

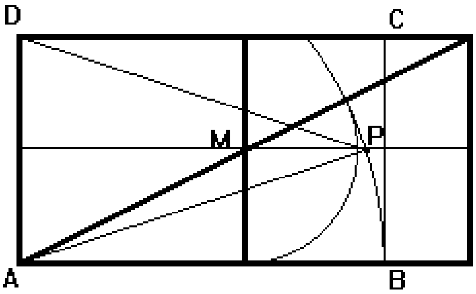


Uno de los diseños, fácil de dibujar (con cuidado de elegir un sentido común de rotación en todos los pasos) es el asociado al triángulo rectángulo isósceles:

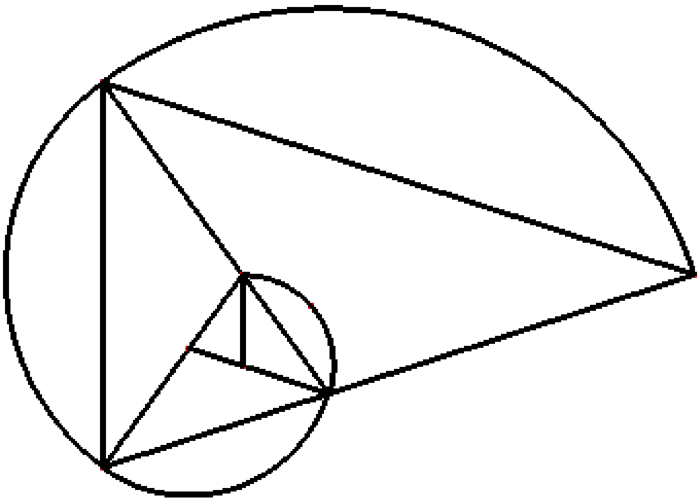


•Dibújalo en papel cuadriculado tomando de partida un triángulo rectángulo isósceles de 16 cuadrículas de cateto.

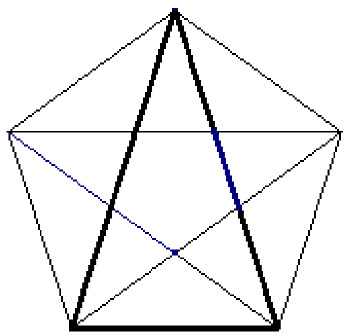
♣ De nuevo la elección del llamado triángulo áureo permite asociar una espiral (no coincidente con las anteriores) que se conecta con suavidad en los puntos donde cambia de arco de circunferencia.



• Construcción de un triángulo áureo a partir de dos cuadrados:

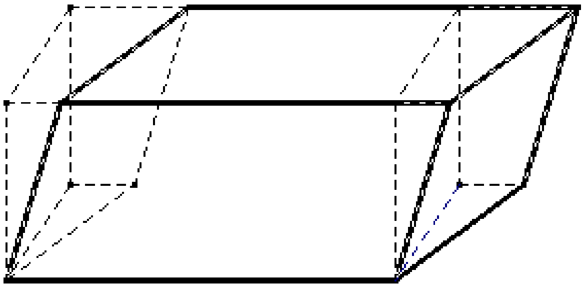


♣ Al crear este proceso en un triángulo áureo se genera en cada paso un segundo triángulo isósceles, lo cual permite construir una segunda espiral a partir de arcos que se pegan con suavidad. Identifica los centros de esos arcos.

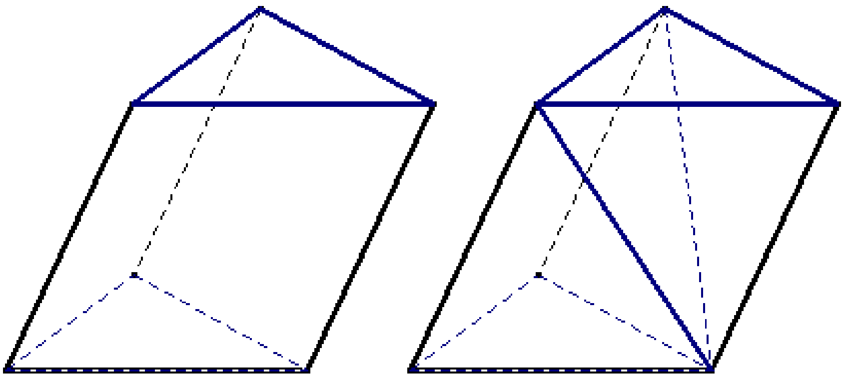


• El triángulo áureo está ligado al pentágono regular y a la estrella pitagórica. Calcula sus ángulos y los del otro triángulo isósceles asociado.

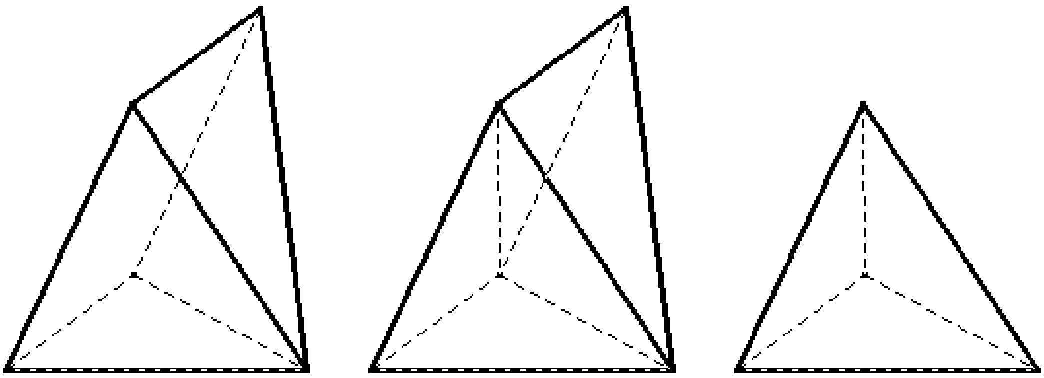
Sobre volúmenes de prismas, pirámides, cilindros y conos (Ficha del profesor)
Partiendo de la fórmula de volumen para ortoedros (cajas de zapatos), no es difícil llegar a la fórmula de volumen para paralelepípedos generales, puesto que el razonamiento es análogo al del plano entre rectángulos y paralelogramos.



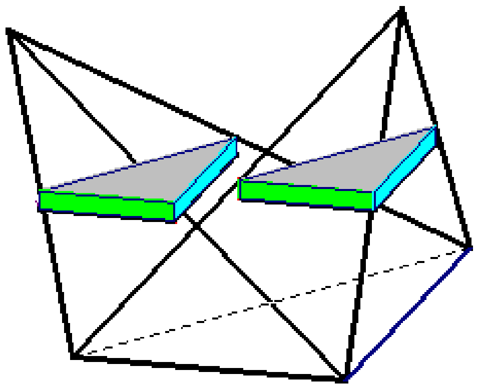
• No hay ningún problema en extender la fórmula a prismas, si bien deberemos dividir éstos en prismas triangulares y razonar que los últimos son mitades de paralelepípedos.
La cosa se complica a la hora de actuar sobre pirámides. De nuevo podemos dividirlas en pirámides triangulares y razonar que éstas se encuentran dentro de un prisma triangular. No es difícil ver que un prisma triangular contiene tres pirámides triangulares, que dos a dos tienen igual base e igual altura. Lo que no resulta tan obvio es que tengan igual volumen. Vayamos por partes:



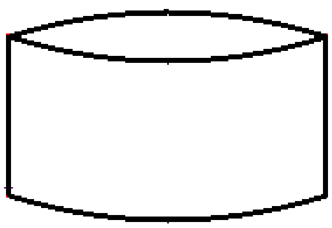
Como queremos ver que hay tres pirámides triangulares en la figura, vamos a partir los cuadriláteros laterales. Dividimos dos de ellos por diagonales coincidentes en un vértice. Vemos entonces una pirámide triangular. La borramos (y llevamos una) y en la figura resultante dividimos el único cuadrilátero con una nueva diagonal. Vemos dos pirámides triangulares y borramos una.



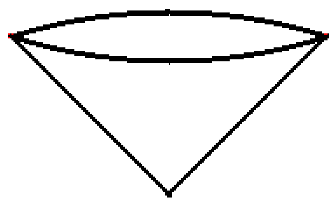
Así hemos visto que en nuestra figura había tres pirámides triangulares. Si las recuperamos antes de borrarlas, podemos observar que dos a dos coinciden en "base" y tienen igual altura sobre esa base. Si esta condición bastara para deducir que tienen igual volumen, tendríamos la fórmula de volumen de las pirámides como un tercio del área de la base por la altura. Efectivamente esto es así, pero no existe una demostración elemental, por troceamiento, de que sea así. • No podemos evitar un razonamiento de tipo exhaustivo:



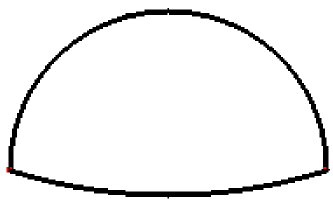
Dos pirámides que comparten base y tienen la misma altura sobre esa base, producen triángulos iguales cuando se las corta por un plano paralelo a la base. El volumen puede ser aproximado tanto como queramos por suma de prismas rectos de bases esos cortes y altura pequeña, por lo que si esos prismas rectos son iguales, los volúmenes serán iguales.
En el fondo aunque quisiéramos en estas elementales figuras disponer de una demostración más sencilla, el razonamiento exhaustivo no nos es extraño, ya que estamos acostumbrados a considerar la circunferencia como polígono regular de infinitos lados, obteniendo el área del círculo como generalización de la fórmula: perímetro por apotema partido por dos, donde el perímetro es **$2\pi r$** y la apotema **r**.
Podemos pues considerar los cilindros como prismas de base poligonal de infinitos lados y obtener su volumen como: **(área de la base) x (altura)**, o los conos como pirámides de base poligonal de infinitos lados y volumen : $\dfrac{\textbf{(área de la base) x (altura)}}{\mathbf{3}}$, distinguiendo siempre en la fórmula figuras espaciales de bases paralelas o puntiagudas.
♣ Con un razonamiento análogo al de las pirámides se obtiene el volumen de la esfera a partir de los del cilindro y el cono. Se consideran las siguientes tres figuras:



Un cilindro de radio r y altura r

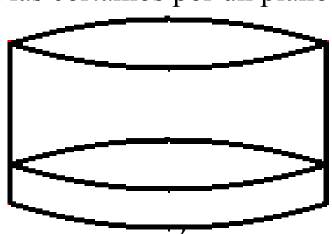


Un cono de radio r y altura r/2

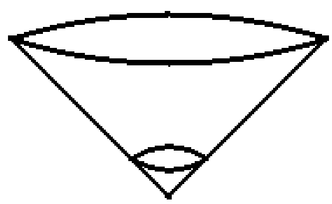


Una semiesfera de radio r

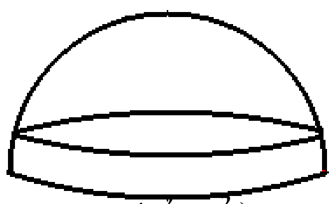
Si las cortamos por un plano paralelo a las bases se obtienen círculos que miden:



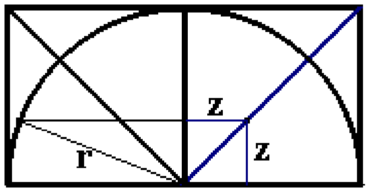
πr^2



πz^2



$\pi(r^2 - z^2)$

relaciones tomadas de la figura: 

Y por tanto la rodaja en el cilindro es suma de la rodaja del cono y la de la semiesfera. Extendiendo eso a toda la figura, se llega a que el volumen del cilindro es igual al de cono más el de la semiesfera, es decir:

$$\pi r^2 . r = \frac{\pi r^2 . r}{3} + \textbf{volumen de la semiesfera}$$

Y por tanto el volumen de la semiesfera es $\frac{2\pi r^3}{3}$

luego el de la esfera es el doble: $\frac{4\pi r^3}{3}$

Todo un triunfo del razonamiento analítico.

- Una regla nemotécnica:

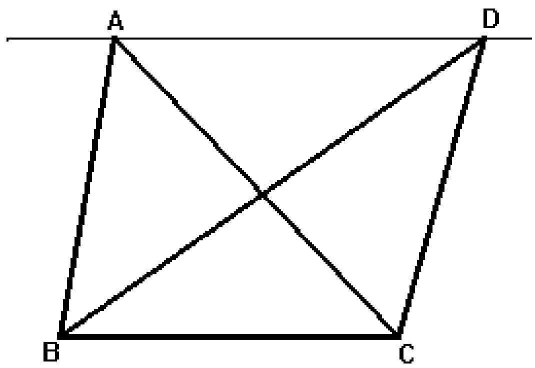
	En el plano. Área =	En el espacio. Volumen =
Figura de dos bases paralelas	(Longitud de la base) x altura	(Área de la base) x (altura)
Figura puntiaguda: una base y un vértice fuera.	$\frac{\text{(Longitud de la base) x altura}}{2}$	$\frac{\text{(Área de la base) x (altura)}}{3}$

La regla anterior es válida no sólo para cilindros y conos, sino para figuras en que las palabras base y altura sean interpretadas correctamente. Así una circunferencia puede ser interpretada como figura ¡puntiaguda! de vértice exterior el centro, ya que éste mantiene su distancia (altura) a toda la base. Así: Área del círculo = $\frac{2\pi r \,.\, r}{2}$

Lo mismo es válido para la esfera: Volumen de la esfera = $\frac{4\pi r^2 . r}{3}$

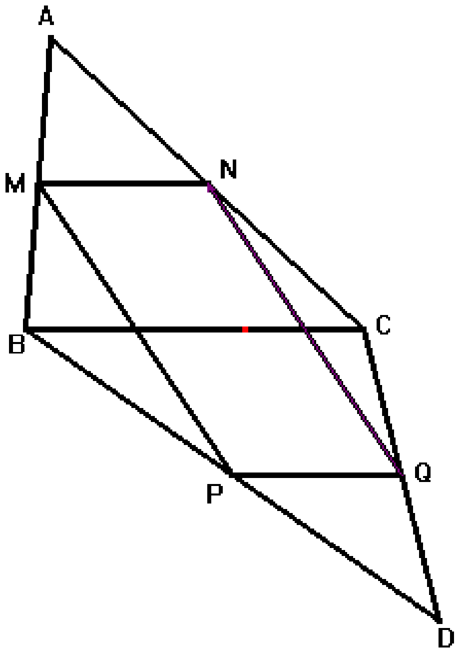
De igual forma, rápidamente, podemos recordar que el área de un sector circular de arco de longitud **s** es $\frac{s.r}{2}$, o que el área de un sector esférico de área de la base **S** es $\frac{S.r}{3}$

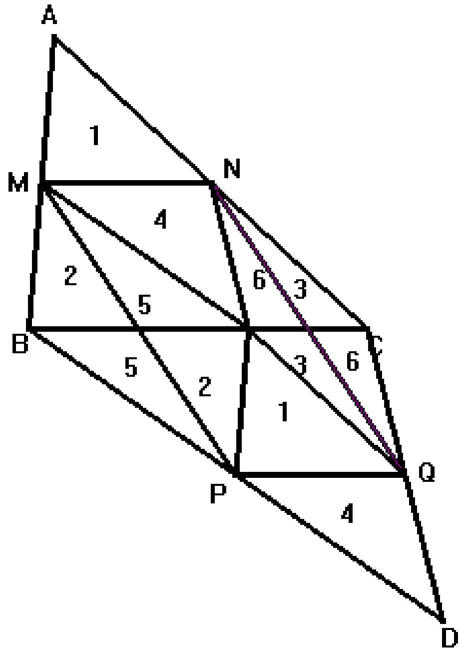
Apéndice:



Veamos cómo es posible convertir (trocear) un triángulo en otro equivalente de igual base sin necesidad de pasar por sus transformaciones en rectángulos.

La posición del dibujo no es la buena para la resolución. Dibujemos un triángulo hacia abajo haciendo su simétrico respecto a la base.





A partir del paralelogramo que une los puntos medios del cuadrilátero **ABCD** y trasladando los triángulos **AMN** y **PQD** según los vectores $\overrightarrow{\mathbf{MP}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{QN}}$ obtenemos la partición de cada triángulo en los mismos seis trozos.

Para acabar este recorrido de semejanzas y diferencias entre fórmulas de figuras planas y figuras redondas podemos acabar con los desarrollos del cilindro y el cono:

Área total cilindro =
$\mathbf{2\pi r^{2} + 2\pi r\ h}$

Área total del cono =
$\mathbf{\pi r^{2} + \pi r\ g}$

Podemos ver de nuevo las relaciones de mitad entre una y otra fórmula, si bien con alguna variante. Ello puede servir también para recordar ambas fórmulas.