MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera la función

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular: $\int_0^1 f(x)dx$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema

$$\begin{cases} (1-a)x-2y+4z &= 0 \\ x-(1+a)y+z &= 0 \\ -x+ay-z &= 0 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran la recta y los planos siguientes

$$r\equiv\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases} ;\ \pi_1\equiv 2-3x+2y-z=0\ ;\ \pi_2\equiv 3+2x+2y-2z=0$$

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y=c$ (distinta de las dos anteriores) de manera que e1 sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro *k:*

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv \quad 2x+3y+kz = 3 \\ \pi_2 &\equiv \quad x+ky-z = -1 \\ \pi_1 &\equiv \quad 3x+y-3z = -k \end{aligned}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(a, f (a)), donde 0<a<1.

b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) (1 punto) Determinar el valor de a E (0, 1) pata el cual la distancia entre el punto A y el punto P(n, f (a)) es el doble de la distancia entre el punto B y el punto P(n, f (a)).