INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.
b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.
Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.
a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π.
b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje $0Z$.
c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7),$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:
a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.
Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & 3y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1. \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$.