

**INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**Calificación total máxima:** 10 puntos.

**Tiempo:** Hora y media.

OPCIÓN A

**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix},$$

- a) (1 punto) Calcular el rango de  $A$  en función de los valores de  $a$ .
- b) (1 punto) En el caso  $a = 2$ , discutir el sistema  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$  en función de los valores de  $b$ , y resolverlo cuando sea posible.
- c) (1 punto) En el caso  $a = 1$ , resolver el sistema  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 2. Calificación máxima:** 3 puntos.

- a) (1'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

con el plano  $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$ .

- b) (1'5 puntos) Hallar la recta  $s$  que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

**Ejercicio 3. Calificación máxima:** 2 puntos.

- a) (1 punto) Calcular la integral  $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$ .
- b) (1 punto) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función  $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$ .

**Ejercicio 4. Calificación máxima:** 2 puntos.

- a) (1 punto) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}.$$

- b) (1 punto) Demostrar que la ecuación  $4x^5 + 3x + m = 0$  sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número  $m$ . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

## OPCIÓN B

### **Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar el valor de  $a$  para el que la función posee un mínimo relativo en  $x = 1$ . Para ese valor de  $a$ , obtener los otros puntos en que  $f$  tiene un extremo relativo.
- (1 punto) Obtener las asíntotas de la gráfica de  $y = f(x)$  para  $a = 1$ .
- (1 punto) Esbozar la gráfica de la función para  $a = 1$ .

### **Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.**

- (2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones  $AX = B$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix},$$

según los valores de  $m$ .

- (1 punto) Resolver el sistema en los casos  $m = 0$  y  $m = 1$ .

### **Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.**

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1,$$

se pide:

- (0'5 puntos) Estudiar su posición relativa.
- (1'5 puntos) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

### **Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.**

- (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano  $\pi_1$  que pasa por los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  y  $C(0, 0, 1)$ .
- (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano  $\pi_2$  que contiene al punto  $P(1, 2, 3)$  y es perpendicular al vector  $\vec{v}(-2, 1, 1)$ .
- (0'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $P$ .