HISTORIA

Sección a cargo de

Jesús Hernández

El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones

por

Rafael Granero Belinchón

1. LA HISTORIA

El problema de Basilea, que debe su nombre a la ciudad natal de Euler (1707–1783) y la familia Bernoulli, consiste en hallar la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$

Es éste un problema recurrente, y cada cierto tiempo reaparece en la literatura; por ejemplo podemos leer sobre este tema en [2], [3] y [4].

Aparece por primera vez en *Novae quadraturae arithmeticae*, libro escrito en 1650 por Pietro Mengoli (1625–1686), que fue alumno de Cavalieri (1598–1647) y profesor de la Universidad de Bolonia. También se recuerda a Mengoli por ser el primero en dar una demostración de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \tag{2}$$

e incluso calcular su suma; es más, en el libro antes citado Mengoli llega a encontrar las sumas de las series de término general

$$\frac{1}{n(n+r)}$$

con r un entero positivo (pero no $r = 0$). La serie (2) también es conocida por ser la que que más tarde Leibniz sumaría por indicación de Huygens (1629–1695).

A partir de esta fecha varios matemáticos intentarán resolver el problema de hallar la suma de (1), aunque ninguno lo conseguirá hasta Euler. El primero en intentarlo fue John Wallis (1616–1703) en su *Arithmetica infinitorum* de 1655, donde aproxima la serie por 1.645, cometiendo un error menor que una milésima.

Leibniz (1646–1716) conoció el problema en 1673, cuando Henry Oldenburg[1] (1619–1677) se lo propuso por carta, y pese a haber sumado la serie (2) antes citada, no pudo sumar (1). Viendo que Leibniz ya conocía esa serie, no nos sorprende que los Bernoulli también la conocieran, siendo Jacob Bernoulli (1654–1705) el que más éxito tiene con ella, pues aunque no consigue sumarla demuestra dos hechos relevantes. El primero, que es una serie convergente, pues la acota por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

Además, como todas las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \tag{3}$$

con $k \geq 2$ cumplen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2,$$

es claro que todas estas series convergen. La convergencia, que ahora es lo primero que se busca en una serie, entonces no era tenida muy en cuenta, pues no buscaban tanto el rigor como ahora; estaban más interesados en enunciar resultados que en proporcionar una demostración impecable.

El segundo es que para una serie del tipo más general (3), la suma de sus términos impares es

$$\frac{2^k-1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Obtener este resultado no es complicado: basta multiplicar toda la serie (3) por 2^{-k}, con lo que la serie que conseguimos es la de los términos pares, y ahora restar esta serie de la original.

Después de estos trabajos no hay ningún paso hacia el cálculo de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

salvo nuevas y mejores aproximaciones de la suma (1). Obtener aproximaciones no es tan fácil como podría parecer, por ser esta serie de convergencia muy lenta. Si sumamos cien términos conseguimos la aproximación 1.63498390018489, correcta en la primera cifra únicamente. Goldbach (1690–1764) en 1729 acota la solución entre 1.664 y 1.665, y Stirling (1692–1770) en 1730 también da una aproximación en su libro *Methodus Differentialis*, 1.644934066, correcta hasta la novena cifra decimal.

[1] Primer secretario de la Royal Society.

Sello con el busto de Euler.

Es en 1730 ó 1731 cuando hace su aparición Euler, con su artículo *De summatione innumerabilium progressionum* [5], publicado en 1738, donde utiliza un método nuevo para aproximar esta serie. Resumamos un poco lo que hace Euler. El lector podrá encontrar muchos más detalles en [4, 11, 12].

Euler parte de la serie de potencias

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots .$$

La divide por $-x$ e integra entre 0 y 1/2, obteniendo

$$\int_0^{1/2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \cdots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n^2} + \cdots . \tag{4}$$

En el lado izquierdo de esta expresión hace la sustitución $y = 1 - x$ consiguiendo

$$\int_0^{1/2} -\frac{\log(1-x)}{x}\, dx = \int_1^{1/2} \frac{\log(y)}{1-y}\, dy;$$

y reparando en que

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

se obtiene

$$\int_1^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \log(y)\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{1/2} y^n \log(y)\, dy.$$

Cada uno de los sumandos se puede integrar por partes,

$$\int_1^{1/2} y^n \log(y)\, dy = \left(\frac{y^{n+1}}{n+1}\log(y) - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\Bigg|_1^{1/2}.$$

Agrupando de nuevo, se consigue

$$\left(\log(y)\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}\right] - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}\right]\right)\Bigg|_1^{1/2}.$$

Podemos ahora sustituir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = -\log(1-y)$$

con lo cual queda

$$\left(\log(y)(-\log(1-y)) - \left[y + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right]\right)\Bigg|_1^{1/2}$$
$$= -\log^2(1/2) - \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^2}}{4} + \cdots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n^2} + \cdots\right] + \log(1)\log(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ahora, Euler desprecia el producto $\log(1)\log(0)$ y procede igualando la expresión de la derecha en (4) con el valor que se ha conseguido de la integral de la izquierda mediante el proceso anterior. De este modo llega a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \log^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}}.$$

Con estos manejos poco rigurosos, la integración de la serie término a término, el no considerar el producto $\log(1)\log(0)$, etcétera, Euler solucionó el problema de la baja velocidad de convergencia de la serie (1): gracias a las potencias de dos en el numerador, los términos de la nueva serie que ha obtenido decaen mucho más rápido, y en consecuencia la convergencia de la serie es mucho mejor. Además, Euler conocía el valor de $\log(2)$ con una gran cantidad de cifras decimales, consiguiendo así una aproximación 1.644934 que es correcta en las seis cifras decimales con la suma de sólo catorce términos de la nueva serie.

1.1. Aproximación mediante productos infinitos

Euler ha conseguido así una manera astuta de realizar una estimación de (1), pero eso no es conocer su valor real, que era lo que buscaban. Sin embargo no transcurre mucho tiempo hasta que se produce otro avance, esta vez definitivo, en el problema de hallar el valor de (1). En una carta de Daniel Bernoulli[2] (1700–1782) en 1736, éste pide a Euler más datos de la sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90},$$

lo que nos indica que Euler ya las conocía por entones. Los razonamientos de Euler en su artículo [5] son los siguientes:

Euler se basa en propiedades conocidas de polinomios para conseguir el resultado, suponiendo que son ciertas también para series infinitas.

[2]Hijo de Johann Bernoulli.

Parte de la función seno, de su fórmula de Taylor, en concreto,

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

y, dividiendo por x,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots .$$

Euler sabía que el seno se anula en $n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Supone que puede poner $\operatorname{sen}(x)/x$ como un producto infinito de la misma manera que se hace con un polinomio, con lo cual escribe

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots .$$

Tenemos aquí que Euler encuentra el desarrollo del seno como producto infinito; sin embargo los motivos que le llevan a afirmar que la expresión que ha encontrado es la verdadera no son correctos, pues no basta con mirar las raíces. Por esto fue criticado en su época. Entre las críticas que recibió están las de Johann Bernoulli (1667–1748), quien le recomienda que por lo menos demuestre que son las únicas raíces del seno. No obstante esto también sería insuficiente. Para convencernos de lo erróneo del razonamiento veamos un ejemplo (que aparece en [12]): la función

$$e^x \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

tiene las mismas raíces y no la misma expresión como producto infinito. A las críticas Euler respondía diciendo que los valores aproximados que él obtenía eran parecidos a $\pi^2/6$.

Al operar en la expresión del $\operatorname{sen}(x)/x$ y fijarnos en el coeficiente de x^2 queda

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \cdots\right)x^2 = -\frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)x^2.$$

Este coeficiente debe coincidir con el coeficiente de la serie original, que es $-1/3! = -1/6$. Euler igualó los coeficientes y obtuvo el ansiado resultado

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

No es una demostración muy rigurosa, aunque el resultado que obtenemos es el correcto. Euler continúa escribiendo artículos dando nuevas demostraciones; por ejemplo, en el *Introductio in analysin infinitorum* [9] obtiene el desarrollo de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ en producto infinito de la siguiente manera:

Primero consigue la serie de potencias de la exponencial. Parte de

$$a^w = (1 + kw),$$

cierto si w es *«infinitamente pequeño»*; entonces, por la serie del binomio,

$$a^{wi} = (1+kw)^i = 1 + \frac{i}{1}kw + \frac{i(i-1)}{2}k^2w^2 + \cdots .$$

En esa expresión, Euler hace $i = z/w$ con z cualquier número finito, con lo que $w = z/i$; así tiene

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i$$

donde está claro, aunque Euler lo obtiene después, que $k = \log(a)$. Razona Euler diciendo que, si i es grande, entonces

$$\frac{i-1}{i} \approx 1, \quad \frac{i-1}{2i} \approx \frac{1}{2}, \quad \ldots,$$

y, tras sustituir,

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{2} + \cdots ;$$

si hacemos ahora $a = e$, con lo que $k = 1$, obtenemos la serie de la exponencial

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots .$$

Prosigue Euler escribiendo

$$e^z - e^{-z} = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{z}{i}\right)^i = 2\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right),$$

y ampliando un resultado anterior, donde conseguía los factores en el caso particular de un polinomio de forma $a^n - z^n$; al comparar obtiene que los factores de esta función son

$$1 + \frac{z^2}{j^2\pi^2} - \frac{z^2}{i^2}$$

con $j \in \mathbb{Z}$ y, además, si $j = 0$ entonces el primer factor será z. Llegado a este punto, Euler razona que, puesto que i es infinitamente grande, el término z^2/i^2 es despreciable.

Euler ha encontrado

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = z\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots = z\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\right),$$

y tras tomar $z = x\sqrt{-1}$ obtiene de otra manera el desarrollo de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Haciendo $z^2 = \pi^2 y$ consigue

$$(1+y)\left(1 + \frac{y}{4}\right)\left(1 + \frac{y}{9}\right)\cdots = 1 + \frac{\pi^2 y}{3!} + \frac{\pi^4 y^2}{5!} + \frac{\pi^6 y^3}{7!} + \cdots .$$

Ahora aplica las llamadas fórmulas de Newton, que relacionan la suma de las potencias de las raíces de un polinomio con los coeficientes del mismo de la siguiente manera: si tenemos

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z) \cdots$$

entonces

$$A = \alpha + \beta + \gamma + \cdots ,$$

quedando el resultado deseado

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

1.2. Aproximación mediante integrales

Como las críticas las había recibido en el desarrollo del seno como un producto infinito, lo que intentaba Euler era desarrollar una teoría clara para estos desarrollos, para así eliminar cualquier duda sobre la solución del problema de Basilea. Sin embargo, también tiene otra demostración, menos conocida, donde resuelve el problema sin ningún desarrollo como producto infinito. Esta demostración fue publicada, bajo el título *Demostration de la somme de cette suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$ en una revista de literatura alemana [7]. El artículo fue publicado sin firma, pero fue redescubierto y adjudicado a Euler por Gauss en 1844.

Comienza Euler considerando un círculo de radio 1, y s un ángulo; denota $x = \operatorname{sen}(s)$ y derivando escribe

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

con lo que

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Tras multiplicar ambas expresiones,

$$s\,ds = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

hace que $x \in [0, 1]$, con lo que $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$, obteniendo

$$\int_0^{\pi/2} s\,ds = \frac{\pi^2}{8}.$$

Aplicando el teorema del binomio generalizado, desarrollamos $(1 - x^2)^{-1/2}$ en forma de serie, con lo cual

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots .$$

Euler ahora integra término a término, que se puede hacer dentro del radio de convergencia, que en este caso es 1, y multiplica, consiguiendo

$$s\,ds = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^3\,dx}{2\cdot 3\cdot\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\cdot x^5\,dx}{2\cdot 4\cdot 5\cdot\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\cdot 5\cdot x^7\,dx}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\sqrt{1-x^2}} + \cdots.$$

Si integra entre $x = 0$ y $x = 1$ obtendrá $\frac{\pi^2}{8}$, como hemos visto antes. Alternativamente, también puede integrar término a término, usando integración por partes:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \left.\frac{x^{n+1}\sqrt{1-x^2}}{n+2}\right|_0^1,$$

y es claro que el término de la derecha se anula. Aparece así una fórmula de recurrencia gracias a la cual obtiene

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}, \quad \int_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \quad \ldots.$$

Sustituye Euler el valor que acaba de conseguir para estas integrales, y queda

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De aquí es fácil deducir el valor de (1) gracias al hecho antes comentado, y demostrado por Jacob Bernoulli, de que la suma en los impares es $\frac{3}{4}$ de la total; sin embargo Euler razona que, como todo número es producto de una potencia de dos y un impar, los cuadrados deben ser un cuadrado impar multiplicado por una potencia de 4; multiplica por tanto la expresión anterior por la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$ y consigue el resultado deseado

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

1.3. Exponente par general

Unos años más tarde Euler, en 1755, en su *Institutiones calculi differentialis* [10] da ya una solución completa al problema de identificar el valor de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

pues relaciona

$$V(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

donde B_n son los números de Bernoulli, con los números que aparecen en las sumas de tipo (3) para k par.

En el *Introductio in analysin infinitorum* [9] había demostrado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b} = \frac{e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})}\pi\sqrt{b} - \frac{1}{2b}.$$

Entonces Euler observa

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+b} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{b}{n^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{n^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}}b^k.\end{aligned}$$

La función

$$\frac{e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})}\pi\sqrt{b} - \frac{1}{2b}$$

se escribe también como

$$\frac{\pi}{2\sqrt{b}}\left(1 + \frac{V(2\pi\sqrt{b})}{\pi\sqrt{b}}\right) - \frac{1}{2b},$$

y usando ahora el desarrollo en serie de potencias de $V(x)$ logrado en [5] obtiene el de la función

$$\frac{e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})}\pi\sqrt{b} - \frac{1}{2b}.$$

Igualando a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2^k+2}}b^k$$

consigue la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}.$$

Acaba Euler de dar un paso muy importante en las matemáticas: ha encontrado varias demostraciones de un problema que se había resistido mucho tiempo, haciéndose muy famoso por el camino. Sin embargo, al más puro estilo Euler, logra exprimir aun más su ya de por sí importante resultado, para obtener otro más relevante y bonito todavía, y que resume en esta frase: ***«el número de primos excede el número de cuadrados»***.

Primero Euler obtiene la expresión de la función *zeta* de Riemann[3] como producto infinito

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

[3]La función *zeta* de Riemann es una de las más famosas de las matemáticas, y relacionada con ella está la también célebre *Hipótesis de Riemann*. Éste es uno de los denominados «problemas del milenio», por cuya solución el instituto Clay otorga un millón de dólares.

Ahora, dado

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^{-1},$$

aplicando logaritmos consigue

$$\log M = -\log\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{3^k}\right) - \cdots .$$

Desarrollando los logaritmos en serie y agrupando llega a

$$\log M = \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^k} + \frac{1}{2} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^{2k}} + \frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^{3k}} + \cdots .$$

Sea asimismo

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}};$$

actuando como antes se obtiene

$$\log N = \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^{2k}} + \frac{1}{2} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^{4k}} + \frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^{6k}} + \cdots$$

y entonces

$$\log M - \frac{\log N}{2} = \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^k} + \frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{3} \frac{1}{p^{3k}} + \cdots .$$

Si ahora elegimos $k = 1$ tenemos que M es la serie armónica[4] $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \log \infty$, y N es la serie de los inversos de los cuadrados, $N = \frac{\pi^2}{6}$, con lo cual

$$\log \log \infty - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^3} + \cdots . \tag{5}$$

En esta expresión, el miembro de la izquierda diverge. Por su parte, el miembro de la derecha está formado por la serie de los inversos de los primos y, además, una suma infinita de series convergentes. Podemos acotarlas todas de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^3} < \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^2}, \quad \frac{1}{5} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^5} < \frac{1}{2} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^4}, \quad \frac{1}{7} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^7} < \frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^6},$$

luego

$$\frac{1}{3} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^3} + \frac{1}{5} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^5} + \cdots \le \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p^4} + \cdots = \log N.$$

[4]La divergencia de la serie armónica ya era conocida desde el siglo XIV, cuando lo demostró Nicolás de Oresme (1321–1382). Muy posterior es la prueba de que $\sum_{n \le x} 1/n$ diverge a la misma velocidad que $\log(x)$.

Por lo tanto, es la serie de los inversos de los primos la que diverge en (5).

En consecuencia, Euler ha conseguido probar la divergencia de la serie de los inversos de los primos, además de dar una indicación sobre cuál podría ser la velocidad de divergencia: cuando sumamos los inversos de los primos hasta n, la suma es como $\log(\log(n))$.

2. Otras demostraciones

En este apartado vamos a ver algunas maneras alternativas de sumar la serie (1), todas ellas más modernas. Varias más se pueden encontrar en [1, 2, 3].

2.1. Demostración utilizando integrales dobles

La primera demostración que presentamos se debe a Apostol, quien la publicó en *The Mathematical Intelligencer* en 1983.

Comenzamos usando que

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{n-1}\, dx\, dy;$$

con eso, aplicando el teorema de la convergencia monótona podemos asegurar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy.$$

Hacemos ahora el cambio $x = u - v$ $y = u + v$, cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2,$$

con lo que la integral queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2}\, dv\, du,$$

donde S es el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1,0)$ y $(1/2,-1/2)$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} 2 \iint_S \frac{1}{1-u^2+v^2}\, dv\, du &= 4\biggl(\int_0^{1/2} \int_0^{u} \frac{dv\, du}{1-u^2+v^2} + \int_{1/2}^{1} \int_0^{1-u} \frac{dv\, du}{1-u^2+v^2} \biggr) \\ &= 4\biggl(\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(u/\sqrt{1-u^2})}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\ &\qquad + \int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{arc\,tg}((1-u)/\sqrt{1-u^2})}{\sqrt{1-u^2}}\, du \biggr). \end{aligned}$$

Observamos ahora que $\operatorname{arc\,tg}(u/\sqrt{1-u^2}) = \operatorname{arc\,sen}(u)$ y que

$$\tan^2(\theta) = \frac{1-u}{1+u}$$

si $\theta = \operatorname{arc\,tg}((1-u)/\sqrt{1-u^2})$. Para el segundo integrando notamos que

$$\sec^2(\theta) = \frac{2}{1+u} \;\Rightarrow\; u = 2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta),$$

y entonces

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arc\,sen}(u)}{2}.$$

Utilizando los cálculos anteriores para la integración de la expresión, queda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 4\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(u/\sqrt{1-u^2})}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 4\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{arc\,tg}((1-u)/\sqrt{1-u^2})}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 4\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arc\,sen}(u)}{\sqrt{1-u^2}}\,du + 4\int_{1/2}^{1} \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arc\,sen}(u)}{2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= 2\operatorname{arc\,sen}^2(u)\Big|_0^{1/2} + \big(\pi \operatorname{arc\,sen}(u) - \operatorname{arc\,sen}^2(u)\big)\Big|_{1/2}^{1} \\
&= \pi^2\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}$$

tal como queríamos probar.

2.2. DEMOSTRACIONES UTILIZANDO SERIES DE FOURIER

Comencemos dando unas bases necesarias sobre el análisis de Fourier.

La aportación clave de Joseph Fourier (1768–1830) fue la idea, ya intuida por Daniel Bernoulli (1700–1782), de que cualquier función $y = f(x) \in L^2[-l,l]$ se puede representar por una serie de la forma[5]

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi x/l}, \qquad y \in L^2[-l,l], \tag{6}$$

con

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-ik\pi x/l}\,dx,$$

aunque sin hacer hipótesis adicionales sobre la regularidad de y no podremos asegurar igualdad puntual. Si una serie de la forma (6) converge, representa una función periódica de período $2l$ y basta, por tanto, estudiar su restricción al intervalo $[-l,l]$ o, de forma equivalente, $[0,2l]$.

[5]En las demostraciones usaremos $L^2[0,1]$, así como series de Fourier en su forma real.

Jean Baptiste Joseph Fourier.

Las representaciones por medio de tales series permiten un grado de generalidad mucho mayor, en cuanto al tipo de funciones a desarrollar, que el que permite la serie de Taylor, pues hay muchas funciones que no admiten una representación en serie de potencias pese a ser bastante regulares. Recordemos el contraejemplo que puso Cauchy para rebatir la afirmación, hecha por Lagrange, de que toda función admitía una representación por serie de potencias:

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función, a pesar de ser C^∞, no admite serie de potencias en torno al cero. Sin embargo, incluso si hay muchos puntos en los que no existe la derivada, o en los que es discontinua, la función puede tener un desarrollo en serie de Fourier.

El análisis de Fourier aparece en la investigación de muchos fenómenos físicos diferentes. Se utiliza, por ejemplo, para estudiar cómo vibra una cuerda o cómo se reparte el calor en un cuerpo. Puede consultarse algo más sobre estos métodos en [13]. Dicho esto vamos a presentar dos demostraciones basadas en series de Fourier; posiblemente, éste es el tipo de método que más se usa actualmente para abordar el problema.

Consideremos $f(x) = x$ en $[0, 1]$. Se tiene que

$$\|f\|^2 = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}, \quad c_0 = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}, \quad c_n = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x}\, dx = \frac{1}{2\pi i n};$$

entonces, por la fórmula de Parseval,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2},$$

es decir

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

y operando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Consideremos ahora la función $g(x) = \chi_{[0,1/2]}$. Entonces

$$\|g\|^2 = \frac{1}{2}, \quad c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_n = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi i n}.$$

Actuando como antes obtenemos

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2r+1)^2},$$

lo que nos da la suma de los impares. Ahora nos basta con usar el hecho descubierto por Jacob Bernoulli y mencionado al principio para lograr el resultado deseado.

Hemos dicho antes que sin hipótesis sobre la regularidad de y no podemos asegurar una igualdad puntual. Ahora bien, en la siguiente demostración tratamos con una función derivable a trozos, que es suficientemente suave como para afirmar que y y su serie son idénticas en todo punto.

Consideramos la función $x(1-x)$ definida en $[0,1]$ y la extendemos de manera par a $[-1,1]$, con lo cual en su desarrollo en serie de Fourier sólo habrá cosenos. Calculamos la serie de Fourier en forma real

$$a_0 = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = 1/3,$$

y sin más que integrar por partes un par de veces tenemos

$$a_n = 2\left(\int_0^1 x\cos(2\pi n x)\,dx + \int_0^1 (-x^2)\cos(2\pi n x)\,dx\right) = \frac{1}{\pi^2 n^2}.$$

Entonces

$$x(1-x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2},$$

y evaluamos en $x = 0$ para obtener el resultado deseado.

2.3. Una demostración sencilla utilizando trigonometría

La siguiente demostración está extraída del libro *Proofs from THE BOOK* [1], y posiblemente sea la demostración más elemental hasta ahora disponible. Sea x tal que $0 < x < \pi/2$, y sea n un entero positivo. Entonces, de la fórmula de De Moivre y de la definición de cotangente, tenemos

$$\frac{\cos(nx) + i\,\mathrm{sen}(nx)}{\mathrm{sen}(x)^n} = \left(\frac{\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(x)}\right)^n = (\mathrm{cotg}(x) + i)^n.$$

Del binomio de Newton,

$$\begin{aligned}(\mathrm{cotg}(x) + i)^n &= \binom{n}{0}\mathrm{cotg}^n(x) + \cdots + \binom{n}{n} i^n \\ &= \left[\binom{n}{0}\mathrm{cotg}^n(x) - \binom{n}{2}\mathrm{cotg}^{n-2}(x) + \cdots\right] \\ &\quad + i\left[\binom{n}{1}\mathrm{cotg}^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\mathrm{cotg}^{n-3}(x) + \cdots\right],\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\mathrm{sen}(nx)}{\mathrm{sen}^n(x)} = \binom{n}{1}\mathrm{cotg}^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\mathrm{cotg}^{n-3}(x) + \cdots.$$

Ahora tomamos $n = 2m+1$ y $x = \frac{r\pi}{2m+1}$, $r = 1, 2, \ldots, m$, con lo que obtenemos

$$0 = \binom{2m+1}{1}\mathrm{cotg}^{2m}(x) - \binom{2m+1}{3}\mathrm{cotg}^{2m-2}(x) + \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}.$$

Estos valores de x son números distintos en $[0, \pi/2]$. Como la función $\mathrm{cotg}^2(x)$ es inyectiva en el intervalo $(0, \pi/2)$, los números $\mathrm{cotg}^2(x) = \mathrm{cotg}^2(\frac{r\pi}{2m+1})$ son distintos para cada valor de $r = 1, 2, \ldots, m$. Pero, por la ecuación anterior, cada uno de estos números es una raíz del polinomio de grado m

$$P(t) = \binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} + \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}.$$

De aquí se obtiene que la suma de estas raíces deberá ser

$$\mathrm{cotg}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \mathrm{cotg}^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{(2m)(2m-1)}{6}.$$

Consideramos ahora la igualdad $\mathrm{cosec}^2(x) = \mathrm{cotg}^2(x) + 1$, con la cual, sustituyendo y pasando m al miembro de la derecha se deduce que la suma de las cosecantes es

$$\mathrm{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \mathrm{cosec}^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{(2m)(2m+2)}{6}.$$

El siguiente paso es conseguir la desigualdad

$$\mathrm{cotg}^2(x) < \frac{1}{x^2} < \mathrm{cosec}^2(x);$$

pero, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, se tiene

$$0 < \operatorname{sen}(x) < x < \tan(x),$$

con lo cual

$$0 < \operatorname{cotg}(x) < \frac{1}{x} < \operatorname{cosec}(x),$$

y entonces obtenemos la desigualdad sin más que elevar al cuadrado.

Sumamos, obteniendo

$$\frac{(2m)(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{(2m)(2m+2)}{6},$$

de donde

$$\frac{(2m)(2m-1)\pi^2}{(2m+1)^2 \cdot 6} < 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{(2m)(2m+2)\pi^2}{(2m+1)^2 \cdot 6}.$$

Hacemos m tender a infinito para obtener el resultado.

AGRADECIMIENTOS. Quiero mostrar mi gratitud a los directores de *La Gaceta* y al encargado de esta sección por el tiempo y atención que me han dedicado, ya que sin sus consejos no se habría podido llegar a la última versión del texto. Así mismo, también me gustaría agradecer su labor al *referee*, sin la cual la publicación de este artículo no habría sido posible.

REFERENCIAS

[1] M. AIGNER Y G. ZIEGLER, *Proofs from THE BOOK*, 3.ª ed., Springer, 2004. Traducido a español como *El libro de las demostraciones*, Nivola, 2005.

[2] R. CHAPMAN, *Evaluating* $\zeta(2)$, disponible en `http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/rjc.html`

[3] A. CÓRDOBA, *Disquisitio Numerorum*, La Gaceta de la RSME **4** (2001), 249–260.

[4] W. DUNHAM, *Euler, el maestro de todos los matemáticos*, Nivola, 2004.

[5] L. EULER, *De summatione innumerabilium progressionum*, Comentarii Academiae Scientarium Petropolitanae **6**, 1738.

[6] L. EULER, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae **7**, 1740.

[7] L. EULER, *Demostration de la somme de cette suite* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$ *&c.*, Journal Littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord, 1743.

[8] L. EULER, *Variae observationes circa series infinita*, Commentarii Academiae Scientarium Petropolitanae **9**, 1744.

[9] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748. Una edición facsímil, junto a su traducción a español con anotaciones y estudios adicionales, fue publicada en *Introducción al análisis de los infinitos*, SAEM Thales y RSME, 2000.

[10] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, 1755.

[11] E. Sandifer, *Estimating the Basel Problem*, MAA Online, 2003, disponible en http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html

[12] E. Sandifer, *Basel Problem with Integrals*, MAA Online, 2004, disponible en http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html

[13] G. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, 2.ª ed., McGraw-Hill, 2002.

Rafael Granero, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid

Correo electrónico: rafael.granero@uam.es