

Introducción a las funciones de varias variables

Alfredo Bautista Santa-Cruz

Curso 209/2010

Capítulo 1

Análisis de funciones de varias variables.

1.1. Introducción

Son conocidos los problemas que dependen de una única variable, por ejemplo:

- Área A de un cuadrado de lado l :

$$A(l) = l^2$$

- Función de ingresos de una empresa que únicamente produce x unidades de un bien al precio p fijo:

$$I(x) = p \cdot x$$

Pero, a veces, es necesario utilizar más variables para describir un problema. Así, necesitamos definir funciones que dependan de más de una variable:

- El área de un rectángulo cuya base es b y cuya altura es h :

$$A(b, h) = b \cdot h$$

- Los ingresos de una empresa que produce x_1 e x_2 unidades de dos bienes distintos, cuyos respectivos precios son p_1 y p_2 :

$$I(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$$

- La función de producción de Cobb-Douglas, que describe las unidades producidas en función de x unidades de trabajo e y unidades de capital, donde C y a son dos constantes fijas tales que $0 < a < 1$:

$$f(x, y) = C \cdot x^a \cdot y^{1-a}$$

En resumen, en un problema en el que interviene más de una característica (variable) independiente, es necesario definir funciones que dependen de más de una variable.

1.2. El conjunto \mathbb{R}^n

Llamemos \mathbb{R} al conjunto de números reales. El conjunto de pares de valores (x_1, x_2) con x_1, x_2 reales lo llamaremos \mathbb{R}^2 , es decir, es el producto cartesiano

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

En general, el conjunto de n -uplas (x_1, \dots, x_n) con x_1, \dots, x_n reales lo llamaremos \mathbb{R}^n , es decir, el producto cartesiano

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

1.3. Funciones de varias variables

Definición 1 (Función de varias variables) *Sea D un subconjunto de \mathbb{R}^n . Si a cada $(x_1, \dots, x_n) \in D$ le corresponde un único número real*

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

*se dice que f es una **función** de las variables x_1, \dots, x_n .*

Ejemplo 2 *Las funciones definidas anteriormente*

$$A(b, h) = b \cdot h$$

$$I(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$$

$$f(x, y) = C \cdot x^a \cdot y^{1-a}$$

son funciones de dos variables.

Definición 3 (Dominio y recorrido) *El conjunto D de la definición anterior se llama **dominio** de f , y el conjunto de valores $f(x_1, \dots, x_n)$ correspondiente a dicho dominio se llama **recorrido** de f .*

Ejemplo 4 ■ $f(x, y) = x^2 + y^2$

La función f está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y por tanto el dominio de f es $D = \mathbb{R}^2$.

Como f puede alcanzar cualquier valor no negativo, el recorrido es $R = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$.

■ $f(x, y) = \log xy$

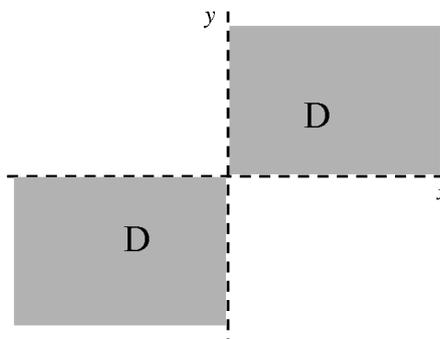
Para que la función f esté definida es necesario que

$$xy > 0$$

entonces

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

así el dominio de f será el siguiente conjunto



y el recorrido es $R = \mathbb{R}$.

Observación 5 Si f y g son funciones de n variables, es decir,

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad y \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

entonces las siguientes operaciones nos dan lugar a nuevas funciones de n variables:

- Suma y diferencia:

$$(f \pm g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \pm g(x_1, \dots, x_n)$$

- Producto:

$$(fg)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n)$$

- Cociente:

Si $g(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)}$$

1.4. Representación gráfica de una función de varias variables.

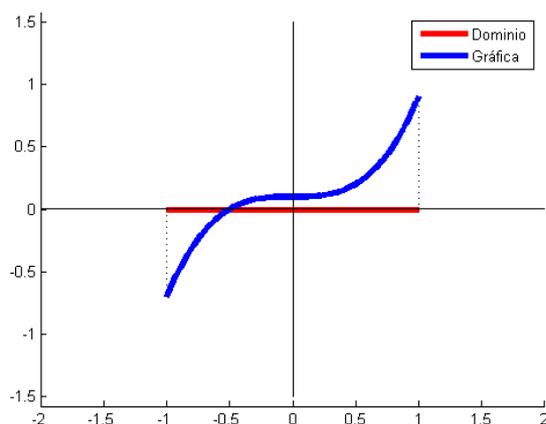
Definición 6 (Gráfica o grafo) La **gráfica** de una función de n variables x_1, \dots, x_n es el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfacen

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

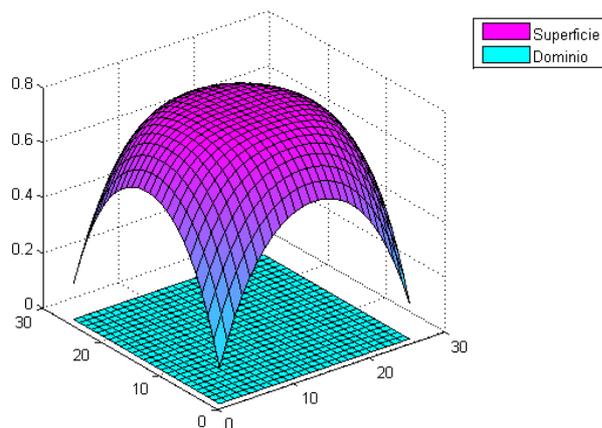
con (x_1, \dots, x_n) en el dominio de f .

La interpretación geométrica de la gráfica es la siguiente:

Para $n = 1$. La gráfica de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la generan los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$ y se puede representar como una curva en \mathbb{R}^2 :



Para $n = 2$. La gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la generan los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y)$ y se puede representar como una superficie en \mathbb{R}^3 :



Para $n \geq 3$. La gráfica de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la generan los puntos (x_1, \dots, x_n, z) tales que $z = f(x_1, \dots, x_n)$ y **no es posible** representarlo de forma completa sobre un papel ya que necesitaríamos ser capaces de representar conjuntos sobre, al menos, cuatro ejes coordenados, es decir en \mathbb{R}^4 .

Nos tendremos que conformar con representaciones parciales.

1.5. Conjuntos de nivel

Los conjuntos de nivel de una función f describen los puntos (x_1, \dots, x_n) del dominio que tienen el mismo valor de f .

El conjunto de nivel k de la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define como:

$$U_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = k\}$$

El valor de k debe estar en el recorrido de la función, ya que en otro caso, el conjunto de nivel k , U_k , será un conjunto vacío.

Si $n = 2$ a los conjuntos de nivel los llamaremos **curvas de nivel**.

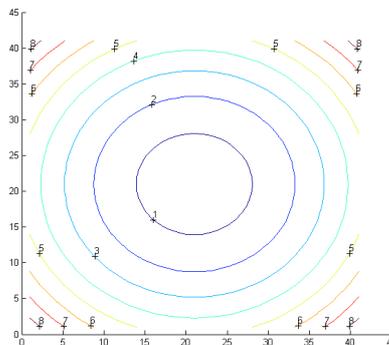
Si $n = 3$ a los conjuntos de nivel los llamaremos **superficies de nivel**.

Ejemplo 7 ■ **Ejemplo 8** • $f(x, y) = x^2 + y^2$.

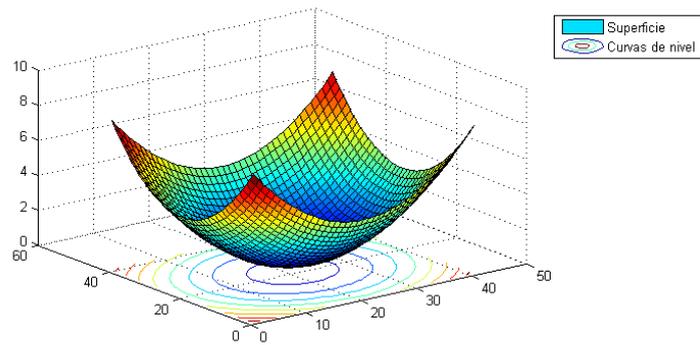
Buscaremos las curvas de nivel $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ de f .

Si $f(x, y) = 0$ entonces $x^2 + y^2 = 0$ y, por tanto, $x = y = 0$.

Si $f(x, y) = k$ entonces $x^2 + y^2 = k$ que es una circunferencia de radio \sqrt{k} .



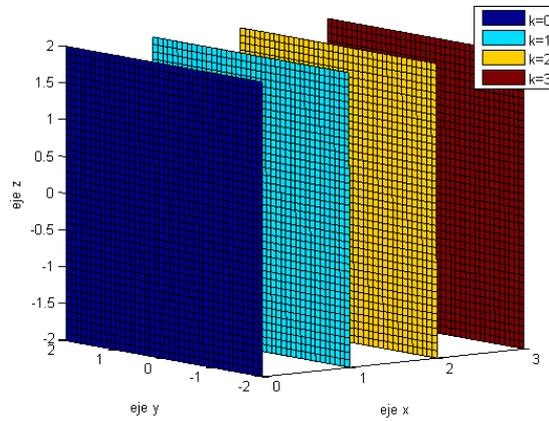
La relación con la gráfica es la siguiente:



- $f(x, y, z) = x$.

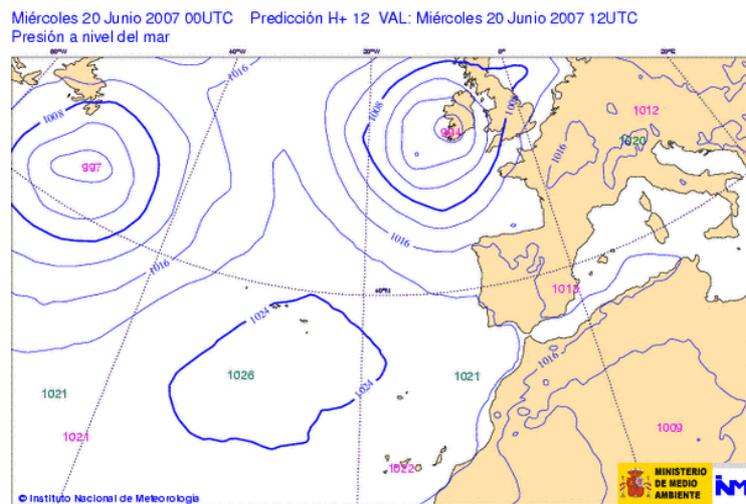
Buscaremos las superficies de nivel 0, 1, 2 y 3 de f .

Si $f(x, y, z) = k$ entonces $x = k$ que es un plano vertical.

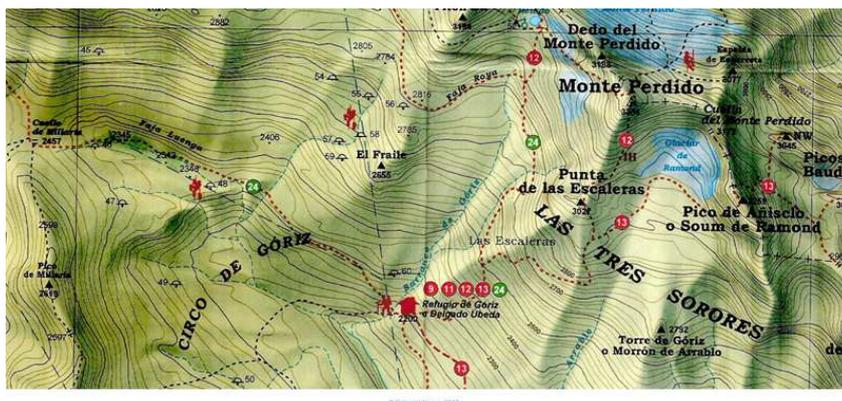


Algunos ejemplos cotidianos de curvas de nivel son:

1. **Isobaras:** Describen las curvas sobre la superficie que tienen la misma presión atmosférica.



2. **Mapas topográficos:** Describen las curvas sobre la superficie terrestre que están a la misma altitud sobre el nivel del mar.

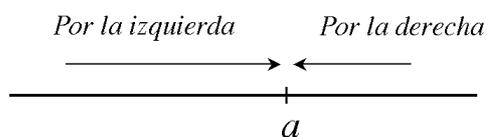


1.6. Límites

Vamos a tratar el concepto de límite de forma intuitiva. Para una función f de una variable, decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

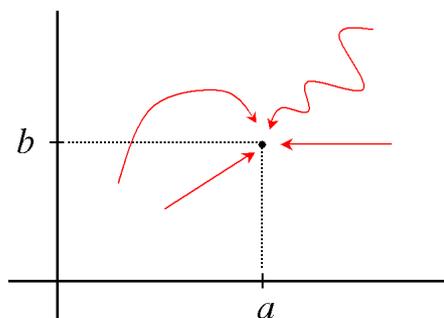
si existen los límites por la derecha y por la izquierda de $x = a$, y además coinciden con el valor de L .



Para una función f de dos variables, decimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

si existen los límites por TODOS los caminos posibles hacia el punto (a,b) , y además coinciden con el valor de L .



Ejemplo 9 ■ $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 2$$

Existe el límite.

■ $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

$$\dot{?} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) \quad ?$$

Si nos acercamos por la recta $y = x$ obtenemos como límite el valor 0. Si nos acercamos por otra recta, por ejemplo, $y = 1$, obtenemos el valor 2. Como estos límites no coinciden, entonces no existe el límite.

La generalización del límite para funciones de n variables es inmediata:

Definición 10 Para una función f de n variables, decimos que

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L$$

si existen los límites por *TODO*s los caminos posibles hacia el punto (a_1, \dots, a_n) , y además coinciden con el valor de L .

Observación 11 (Propiedades)

Sean f y g funciones tales que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = F$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = G$ entonces:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \pm g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = F \pm G$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \cdot g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = F \cdot G$
3. Si $G \neq 0$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right) = \frac{F}{G}$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} e^{f(x,y)} = e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \log f(x, y) = \log \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$

Ejercicio 12 Utilizar las propiedades anteriores para calcular

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{e^{x+y+z}}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

1.7. Continuidad

Definición 13 Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto (a_1, \dots, a_n) si

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n)$$

Diremos simplemente que f es continua si lo es para todo punto de su dominio. Intuitivamente, f es continua en (a_1, \dots, a_n) si su gráfica no tiene saltos, agujeros, asíntotas, ...

Ejemplo 14 ¿Son funciones continuas

$$\blacksquare f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 1) \end{cases} \text{ en } (1, 1)?$$

$$\blacksquare f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \text{ en } (1, 1)?$$

$$\blacksquare f(x, y, z) = \frac{e^{x+y+z}}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \text{ en } (0, 0, 0)?$$

Observación 15 (Propiedades) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en (a_1, \dots, a_n) , y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $f(a_1, \dots, a_n)$, entonces

- $f + g$ es continua en (a_1, \dots, a_n) .
- $f \cdot g$ es continua en (a_1, \dots, a_n) .
- Si $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en (a_1, \dots, a_n) .
- La composición $h \circ f$ es continua en (a_1, \dots, a_n) .

Observación 16 Las funciones polinómicas, racionales cuyo denominador no se anula y composiciones de estas con exponenciales, logaritmos, etc. son continuas.

Ejemplo 17 ¿Es continua $f(x, y) = \frac{e^{\frac{x+y+z}{x^2+1}} \cdot \cos(xy)}{xy+1}$ en $(0, 0)$?

1.8. Ejemplos de resumen

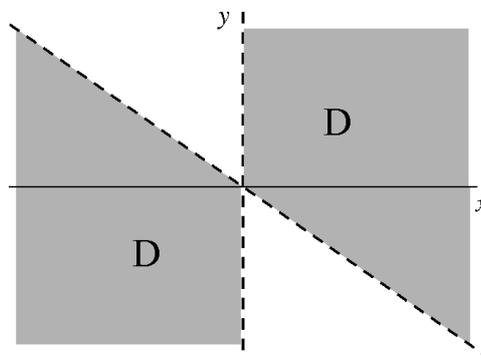
Ejemplo 18 Dibujaremos y describiremos analíticamente los dominios D de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = \log(xy + x^2)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x^2 > 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y + x > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y + x < 0\} \end{aligned}$$

Así el dominio es el conjunto

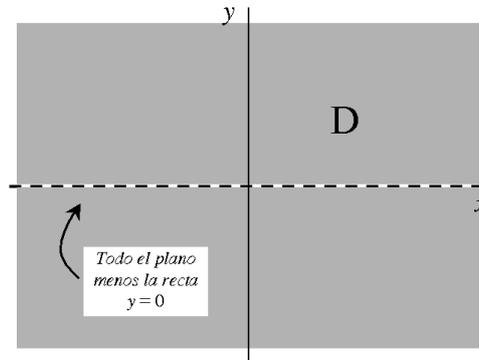


2. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$.

Tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

Así el dominio es



3. $f(x, y, z) = 2x + 7y^2 - 1200xy + 8$.

Tenemos que

$$D = \mathbb{R}^3$$

ya que f está definida para todo punto (x, y, z) .

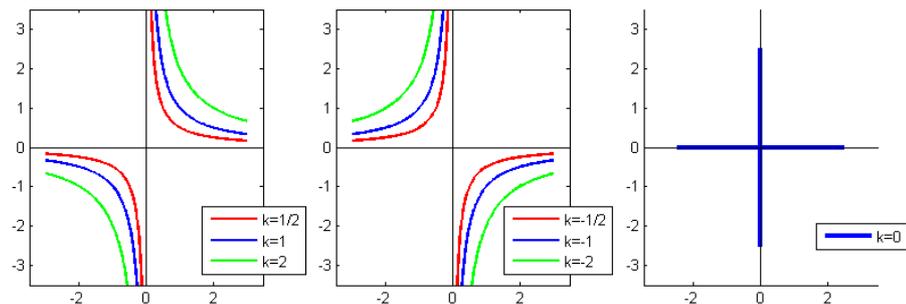
Ejemplo 19 Dibujaremos algunos conjuntos de nivel

1. $f(x, y) = xy$.

Tenemos que

$$U_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = k\}$$

Así, las curvas de nivel verifican $y = k\frac{1}{x}$ para cada k .

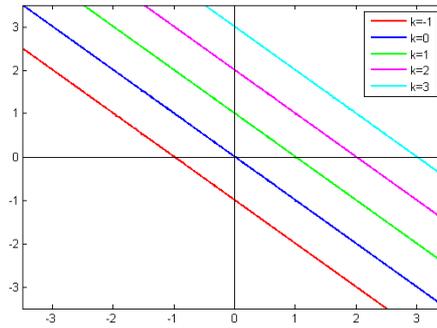


2. $f(x, y) = x + y$.

Tenemos que

$$U_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = k\}$$

Así, las curvas de nivel verifican $y = k - x$ para cada k .



Ejemplo 20 Estudiaremos la continuidad de algunas funciones

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos que f es una función racional cuyo denominador no se anula, por lo que f es continua en cualquier punto $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Qué pasa en $(0, 0)$?

Nos aproximaremos por dos caminos distintos,

$$\text{la recta } x = 0$$

y

$$\text{la recta } y = 0$$

Así

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); x=0} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); x=0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = -1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); y=0} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); y=0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = 1$$

y como estos dos límites son distintos, entonces no existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

y por tanto no puede ser continua en $(0, 0)$.

(Es posible calcular el límite por todas las rectas $y = \lambda x$ a la vez:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); y=\lambda x} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); y=\lambda x} \frac{x^2 - \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 - \lambda^2)}{x^2 (1 + \lambda^2)} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$$

y como depende de la pendiente λ , entonces f no es continua en $(0, 0)$.

$$2. f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

Para los puntos $(x, y) \neq (1, 1)$ la función f es un polinomio en las variables x e y , y por tanto f es continua para estos puntos. En el punto $(x, y) = (1, 1)$ la función f tiene límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} xy = 1$$

y como

$$f(1, 1) = 2$$

entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = 1 \neq 2 = f(1,1)$$

y por lo tanto f no es continua en $(1,1)$.

3. $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x^2y + 6$

Como

$$\begin{aligned} h(x) &= e^x \\ g_1(x,y) &= x^2 + y^2 \\ g_2(x,y) &= x^2y \\ g_3(x,y) &= 6 \end{aligned}$$

son continuas en todo punto de sus dominios y

$$f = (h \circ g_1) + g_2 + g_3$$

entonces por las propiedades anteriores, la función f es continua en todo su dominio \mathbb{R}^2 .

Capítulo 2

Derivabilidad y diferenciabilidad.

2.1. Derivadas parciales

Podemos preguntarnos cómo varía la función si variamos una sola variable independiente manteniendo constantes las demás, o bien cómo varía la función si nos movemos en una dirección.

Para responder a estas preguntas necesitamos extender el concepto de **derivada** a funciones de varias variables.

La extensión que construiremos hace que para funciones de varias variable no exista una única derivada, sino varias.

Definición 21 (Derivadas parciales): Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables. Diremos que la derivada parcial de f con respecto de x en el punto (x, y) es la función

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

siempre que exista el límite.

Definición 22 De igual manera podemos definir la derivada parcial de f con respecto de y en el punto (x, y) como la función

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

siempre que exista el límite.

Notación 23 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

Definición 24 (Derivadas parciales - para n variables): Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función en las variables (x_1, \dots, x_n) . Diremos que la derivada parcial de f con respecto de x_k en el punto (x_1, \dots, x_n) es la función

$$f_{x_k}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k+h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

siempre que exista el límite.

2.1.1. Interpretación geométrica para $n = 2$.

La derivada parcial f_x en el punto (x_0, y_0) representa la tangente (pendiente) de la curva

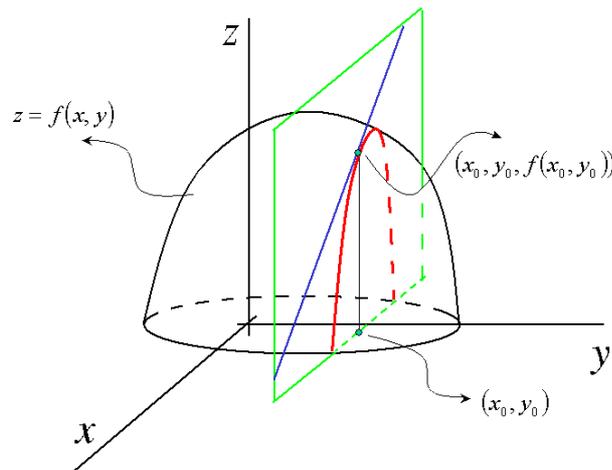
$$h(x) = f(x, y_0)$$

en el punto x_0 .

Es decir, es como si cortáramos la superficie $z = f(x, y)$ (en negro) con el plano $y = y_0$ (en verde) y la pendiente de la recta tangente en x_0 (en azul) de la curva intersección (en rojo) es la derivada parcial de f respecto de x en (x_0, y_0) .

La interpretación geométrica de la f_y es análoga, intercambiando el papel de x e y .

Observe el dibujo



Ejemplo 25 Utilizando la definición vamos a calcular las derivadas parciales de

$$f(x, y) = 3x + x^2y^2 + 2$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) + (x+h)^2y^2 + 2 - 3x - x^2y^2 - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 2xhy^2 + h^2y^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 + 2xy^2 + hy^2 = 3 + 2xy^2 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x + x^2(y+h)^2 + 2 - 3x - x^2y^2 - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx^2y + x^2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x^2y + x^2h = 2x^2y \end{aligned}$$

Observación 26 Estas derivadas parciales obedecen las mismas reglas de derivación habituales que las funciones de una variable, considerando la variable respecto a la que queremos derivar como la única variable de la función, y las demás variables como si fueran constantes.

Ejemplo 27 Utilizando estas reglas de derivación vamos a calcular las derivadas parciales de:

- $f(x, y) = (2x + y)^{-3}$

Tenemos que

$$f_x(x, y) = -3(2x + y)^{-4} \cdot 2 = -6(2x + y)^{-4}$$

y además

$$f_y(x, y) = -3(2x + y)^{-4} \cdot 1 = -3(2x + y)^{-4}$$

- $f(x, y, z) = e^{xy} \cos(yz)$

$$f_x(x, y, z) = e^{xy} \cos(yz) \cdot y$$

$$f_y(x, y, z) = xe^{xy} \cos(yz) - e^{xy} \operatorname{sen}(yz) \cdot z$$

$$f_z(x, y, z) = -e^{xy} \operatorname{sen}(yz) \cdot y$$

2.2. Derivadas de orden superior

Una vez que hemos calculado alguna derivada parcial de $z = f(x, y)$, esto es, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ podemos volver a calcular las derivadas parciales de estas funciones (siempre que existan). De esta manera a partir de

$$f(x, y)$$

calculamos las derivadas primeras de f ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

y a partir de estas, calculando sus derivadas parciales obtenemos las **derivadas parciales de orden 2** o **derivadas parciales segundas** de f ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}(x, y) & \quad \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x}(x, y) & \quad \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Notación 28 Para simplificar la notación llamaremos

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(x, y) \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

En general, la derivada de orden m

$$f_{x_i x_j \dots x_k}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^m f}{\partial x_k \dots \partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_k \dots \partial x_j}\right)}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

Ejemplo 29 Vamos a calcular las derivadas parciales de orden 2 de

$$f(x, y) = (2x + y)^{-3}$$

Ya calculamos anteriormente que

$$f_x(x, y) = -6(2x + y)^{-4} \qquad f_y(x, y) = -3(2x + y)^{-4}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 24(2x + y)^{-5} \cdot 2 = 48(2x + y)^{-5} \\ f_{xy}(x, y) &= 24(2x + y)^{-5} \\ f_{yx}(x, y) &= 12(2x + y)^{-5} \cdot 2 = 24(2x + y)^{-5} \\ f_{yy}(x, y) &= 12(2x + y)^{-5} \end{aligned}$$

Observación 30 ¿Es una casualidad que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 24(2x + y)^{-5}$?

Teorema 31 (Schwarz) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen en un entorno del punto (a, b) y la función $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en (a, b) , entonces existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y se verifica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

Observación 32 El teorema de Schwarz es válido para cualquier número de variables y para cualquier orden de la derivada parcial, siempre que se verifiquen las hipótesis, ya que estas son derivadas parciales segundas de otra derivada parcial. Así podemos tener

$$f_{xyzx} = f_{xxyz} = f_{yzxx} = f_{zxxy} = \dots$$

Observación 33 El teorema se debe a Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)



2.3. Gradiente

Definición 34 (Gradiente) Sea $z = f(x_1, \dots, x_n)$ una función tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se llama **gradiente** de f en (x_1, \dots, x_n) al vector

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

2.4. Hessiano

Definición 35 (Hessiano o matriz hessiana) Sea $z = f(x_1, \dots, x_n)$ una función tal que tiene todas sus derivadas parciales hasta el orden 2 continuas. Entonces se dice que la **matriz hessiana** o **hessiano** de f en $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es la matriz

$$Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Observación 36 Según la definición de hessiano, como las derivadas parciales hasta el orden 2 son continuas, entonces podemos aplicar el teorema de Schwarz y así tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$$

y por tanto la matriz hessiana es simétrica.

Observación 37 Esta matriz lleva el nombre del matemático alemán **Ludwig Otto Hesse** (1811 - 1874).



Ejemplo 38 Sea $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}(2y)$, vamos a calcular $\nabla f(1, \frac{\pi}{2})$ y $Hf(1, \frac{\pi}{2})$.
Primero calculamos las derivadas parciales primeras

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \operatorname{sen}(2y) \\ f_y(x, y) &= 2x^2 \cos(2y) \end{aligned}$$

por lo que

$$\nabla f(x, y) = (2x \operatorname{sen}(2y), 2x^2 \cos(2y))$$

Podemos ahora calcular las derivadas parciales segundas

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 \operatorname{sen}(2y) & f_{xy}(x, y) &= 4x \cos(2y) \\ f_{yx}(x, y) &= 4x \cos(2y) & f_{yy}(x, y) &= -4x^2 \operatorname{sen}(2y) \end{aligned}$$

por lo que

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen}(2y) & 4x \cos(2y) \\ 4x \cos(2y) & -4x^2 \operatorname{sen}(2y) \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo en el punto $(1, \frac{\pi}{2})$ tenemos que

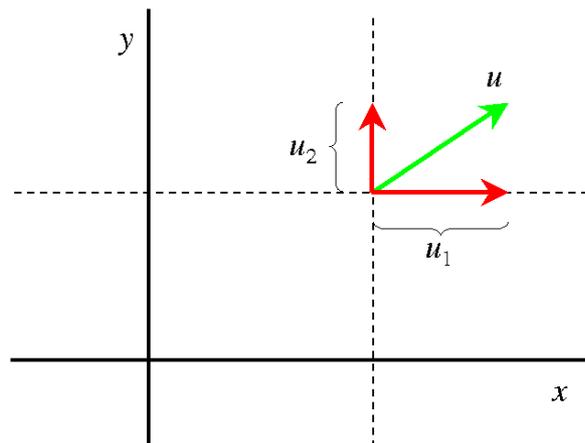
$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(2 \cdot 1 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), 2 \cdot 1^2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, -2)$$

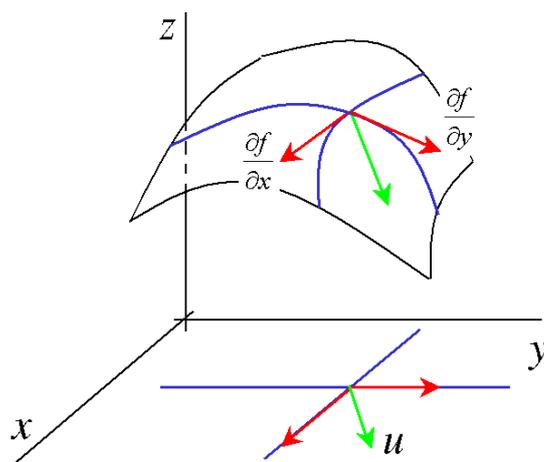
y además

$$Hf\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) & 4 \cdot 1 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ 4 \cdot 1 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) & -4 \cdot 1^2 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5. Derivadas direccionales

Hemos visto que la derivada parcial f_x mide la variación de f cuando nos movemos por la recta $y = cte$. Para medir la variación de f en otra dirección cualquiera necesitamos el concepto de derivada direccional.





Observación 39 ¿Cómo construir un vector de módulo 1 en la misma dirección que uno dado? Consideremos un vector $v = (x, y)$ en cuya dirección se quiera medir cómo varía la función f .

Construimos el vector

$$u = \frac{v}{\|v\|}$$

donde $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el módulo de v . Así el vector u tiene longitud igual a 1 ya que

$$\|u\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

Cualquier vector u tal que $\|u\| = 1$ le llamaremos **unitario**.

Definición 40 (Derivada direccional) Sea $z = f(x, y)$ y sea $u = (u_1, u_2)$ un vector unitario. La derivada direccional de f en la dirección de u en el punto (x, y) se define como

$$D_u f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu_1, y + tu_2) - f(x, y)}{t}$$

siempre que exista este límite.

Definición 41 (Derivada direccional - n variables) Sea $z = f(x_1, \dots, x_n)$ y sea $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vector unitario. La derivada direccional de f en la dirección de u en el punto (x_1, \dots, x_n) se define como

$$D_u f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + tu_1, \dots, x_n + tu_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

siempre que exista este límite.

Ejemplo 42 Calcular la derivada de $f(x, y) = e^{x+y}$ en la dirección del vector $u = (2, 1)$ en el punto $(x, y) = (0, 0)$. ¿Existe la derivada direccional de f en cualquier punto (x, y) y en cualquier dirección u ?

Como el módulo del vector u es

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \neq 1$$

entonces u no es unitario. Construimos el vector $\bar{u} = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ que es unitario. Por lo tanto

$$D_{\bar{u}} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(0 + t \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 + t \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - f(0, 0)}{t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t\frac{2}{\sqrt{5}} + t\frac{1}{\sqrt{5}}} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)} - 1}{t} = L'Hopital = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{\sqrt{5}} e^{t\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)}}{1} = \frac{3}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Para contestar la segunda pregunta, supongamos que $u = (u_1, u_2)$ es cualquier vector unitario. Entonces

$$\begin{aligned}
D_u f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu_1, y + tu_2) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(x+tu_1+y+tu_2)} - e^{x+y}}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{x+y} (e^{t(u_1+u_2)} - 1)}{t} = e^{x+y} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{t(u_1+u_2)} - 1)}{t} = L'Hopital = \\
&= e^{x+y} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(u_1 + u_2) e^{t(u_1+u_2)}}{1} = e^{x+y} (u_1 + u_2)
\end{aligned}$$

que existe para todo punto (x, y) y toda dirección $u = (u_1, u_2)$.

2.6. Relación entre continuidad y derivabilidad

Entendiendo por derivabilidad la existencia de derivadas parciales, veamos que no hay ninguna relación entre ésta y la continuidad.

Ejemplo 43 *Función continua no derivable en un punto.*

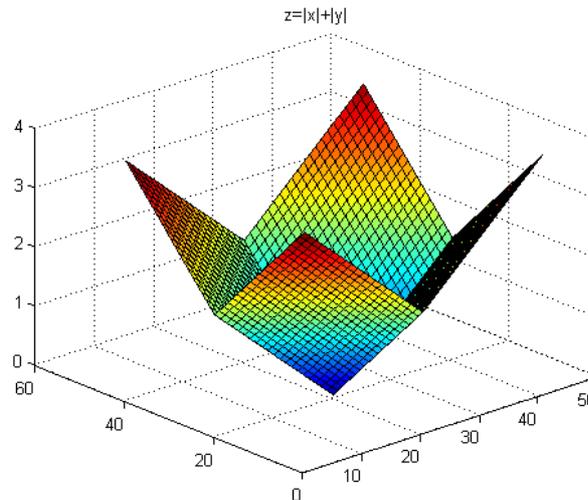
Sea $f(x, y) = |x| + |y|$, que es continua en $(0, 0)$ ya que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| + |y| = 0$, pero se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

por lo que no existe el límite y por tanto no existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto $(0, 0)$. De igual modo se demuestra que no existe $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

f continua $\not\Rightarrow$ f derivable

La gráfica de f es:



Ejemplo 44 *Función derivable y no continua en un punto.*

Sea $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$ que no es continua en $(0, 0)$, pero

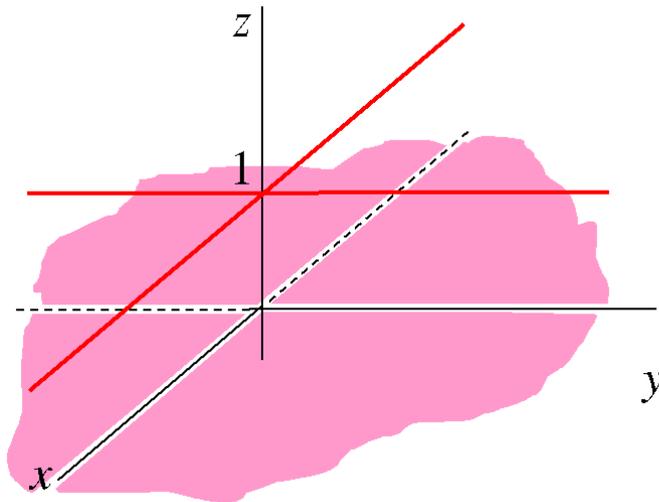
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

como ambos límites existen, entonces existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

f derivable $\not\Rightarrow$ f continua

La gráfica de f es:



Ejercicio 45 *Demostrar aproximando por las parábolas $x = \lambda y^2$ que no es continua en $(0, 0)$ la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ¿Para qué direcciones $v = (v_1, v_2)$ unitarias existe la derivada direccional de f en $(0, 0)$?*

Ejercicio 46 *Para las funciones $f(x, y) = xe^{\frac{x}{y}}$ y $h(x, y, z) = xe^z + y \cos(x+z)$, calcular ∇f , ∇h , Hf , Hh , h_{xyz} , h_{yxz} , h_{yzx} , h_{xzy} , h_{xzy} , h_{zxy} y h_{zyx} .*

2.7. Diferenciabilidad

2.7.1. Diferencial de una función de una variable

En el caso de una función de **una variable**, se puede definir la diferencial de f en el punto x_0

$$df_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0)$$

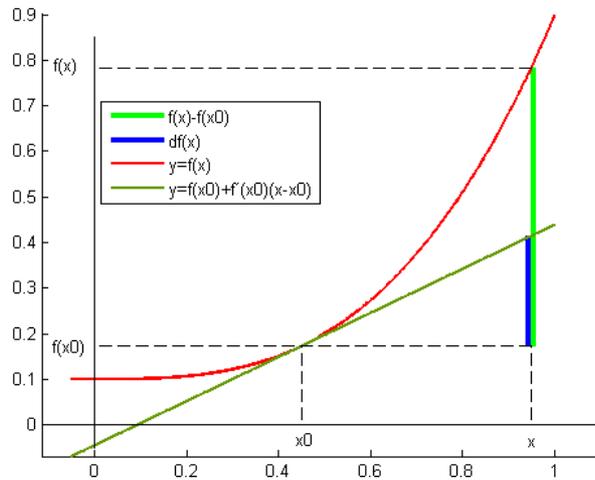
o equivalentemente, si llamamos $\Delta x = (x - x_0)$ entonces

$$df_{x_0}(x) = f'(x_0) \Delta x$$

La diferencial df_{x_0} , según esta definición, existe si y sólo si existe la derivada $f'(x_0)$, por lo que para las funciones de una variable el concepto de derivabilidad coincide con la diferenciabilidad.

Derivabilidad = Diferenciabilidad

Esta función aproxima la cantidad $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ cuando x e x_0 están próximos:



Ejemplo 47 Si $f(x) = x^2 + \log x$, vamos a aproximar el valor de $f(1'01)$ mediante la diferencial. Nos apoyamos en el punto $x = 1$ que está cercano a $x = 1'01$. Por eso calculamos

$$df_{(1)}(x) = f'(1)(x - 1) = \left[2x + \frac{1}{x} \right]_{x=1} (x - 1) = 3(x - 1)$$

y entonces

$$df_{(1)}(1'01) = 3(1'01 - 1) = 0'03$$

De esta manera, como

$$df_{(1)}(1'01) \approx \Delta y = f(1'01) - f(1)$$

entonces

$$f(1'01) \approx f(1) + df_{(1)}(1'01) = 1 + 0'03 = 1'03$$

2.7.2. Diferencial de una función de varias variables

Vamos a construir el mismo concepto para funciones de dos variables $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) .

Incrementamos x_0 hasta el valor $x_0 + \Delta x$, considerando f como una función de una variable, así

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0 + \Delta x, y_0)$$

por lo que una aproximación será

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Si hacemos lo mismo incrementando y_0 hasta el valor $y_0 + \Delta y$,

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0 + \Delta y)$$

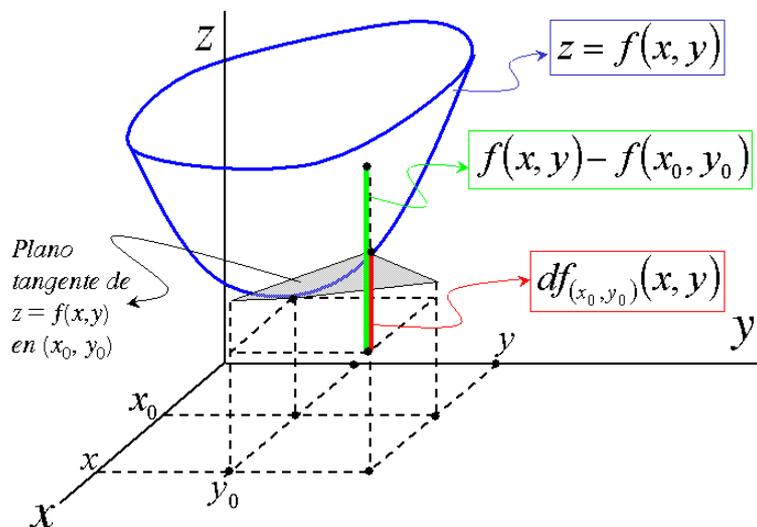
entonces

$$\Delta f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

La suma de estos dos incrementos puede ser una buena aproximación de $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, por lo que definimos la diferencial de f en (x_0, y_0) como

$$df_{(x_0, y_0)}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

El valor de $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ se puede aproximar mediante la función $df_{(x_0, y_0)}(x, y)$.



La generalización de la diferencial para funciones de n variables es análoga. Si $\bar{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ es un punto particular y si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector de variables, se define la diferencial de f en \bar{x}_0 como

$$df_{\bar{x}_0}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0)(x_n - x_n^0)$$

es decir

$$df_{\bar{x}_0}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 48 Calcular la diferencial de $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ en el punto $(2, 2)$ y aproximar el valor de $\frac{1}{4'0401} = \frac{1}{(2'01)(2'01)}$.

Las derivadas parciales de f son $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-1}{x^2 y}$ y además $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{xy^2}$, que son continuas en $(2, 2)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = \frac{-1}{8} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = \frac{-1}{8}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} df_{(2,2)}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)(y - 2) = \\ &= \frac{-1}{8}(x - 2) + \frac{-1}{8}(y - 2) = \frac{-1}{8}(x + y - 4) \end{aligned}$$

Para aproximar el valor de $\frac{1}{(2'01)(2'01)} = f(2'01, 2'01)$ utilizamos la diferencial de f en $(2, 2)$, así

$$df_{(2,2)}(2'01, 2'01) \approx f(2'01, 2'01) - f(2, 2)$$

y por tanto

$$f(2'01, 2'01) \approx df_{(2,2)}(2'01, 2'01) + f(2, 2) = \\ = \frac{-1}{8}(2'01 + 2'01 - 4) + \frac{1}{4} = -0'0025 + 0'25 = 0'2475$$

El valor real es $f(2'01, 2'01) = 0,2475186\dots$

Definición 49 (Diferenciabilidad) Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

puede expresarse de la forma

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Es decir, f es diferenciable si podemos aproximarla mediante la diferencial $df_{(x_0, y_0)}(x, y)$.

Observación 50 (Condición necesaria de diferenciabilidad) Por la definición anterior, una función diferenciable f se puede aproximar mediante la diferencial $df_{\bar{x}_0}(\bar{x})$, por lo que entonces debe existir

$$df_{\bar{x}_0}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

entonces es necesario que exista $\nabla f(\bar{x}_0)$, es decir, para que f sea diferenciable en \bar{x}_0 es necesario que existan todas sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ en el punto \bar{x}_0 .

Teorema 51 (Condición suficiente de diferenciabilidad) Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en (x_0, y_0) entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

Teorema 52 Si f es una función diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es continua en (x_0, y_0) .

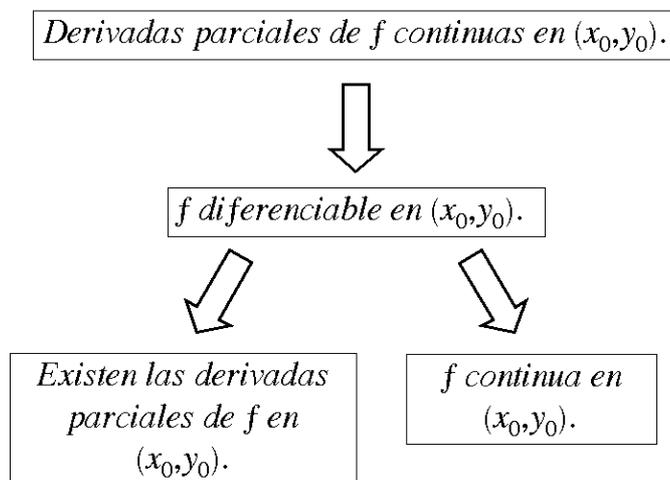
Hay que recordar que no basta con la existencia de las derivadas parciales en un punto, ya que vimos que

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

tenía derivadas parciales en $(0, 0)$ pero f no es continua en $(0, 0)$. Al no ser continua, por el teorema anterior, f no puede ser diferenciable en $(0, 0)$.

Derivabilidad \neq Diferenciabilidad

Las implicaciones válidas son las siguientes:



2.8. Relación entre derivadas parciales y derivada direccional

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\bar{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ es un vector unitario, entonces se puede simplificar el cálculo de la derivada direccional

$$D_{\bar{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hu_1, y + hu_2) - f(x, y)}{h}$$

como

$$D_{\bar{u}}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot u_2$$

La generalización para n variables es inmediata, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces se puede escribir

$$D_{\bar{u}}f(x_1, \dots, x_n) = \nabla f(x_1, \dots, x_n) \bullet \bar{u}$$

donde el símbolo \bullet denota el producto escalar.

Con la fórmula anterior, si calculamos las derivadas direccionales en la dirección de los vectores $\bar{u} = (1, 0)$ y $\bar{v} = (0, 1)$ obtenemos que

$$D_{\bar{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \bar{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$D_{\bar{v}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \bar{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

por lo que las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales.

Ejemplo 53 Calcular la derivada de $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ en la dirección de $\bar{u} = (1, 1)$ en el punto $(1, 0)$.

Como $\|\bar{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ entonces el vector \bar{u} no es unitario. Construimos $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ que es unitario. Por la definición

$$\begin{aligned} D_{\bar{v}}f(1, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + h\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 + h\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\left(1 + h\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(0 + h\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{6h}{\sqrt{2}} + \frac{3h^2}{2} - h^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{3h}{2} - h = \frac{6}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

De otra forma, como f es un polinomio, entonces es diferenciable y entonces como $\nabla f(x, y) = (6x, -4y)$ se tiene que

$$\begin{aligned} D_{\bar{v}}f(1, 0) &= \nabla f(1, 0) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= (6, 0) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2.9. Propiedades de las funciones diferenciables

Sea f una función diferenciable en $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

1. Si $\nabla f(\bar{x}) = (0, \dots, 0)$ entonces $D_{\bar{u}}f(\bar{x}) = 0$ para todo $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$.
2. La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por la dirección de $\nabla f(\bar{x})$, y el valor máximo de $D_{\bar{u}}f(\bar{x})$ es $\|\nabla f(\bar{x})\|$.
3. La dirección de máximo decrecimiento de f viene dada por la dirección de $\nabla f(\bar{x})$, y el valor mínimo de $D_{\bar{u}}f(\bar{x})$ es $-\|\nabla f(\bar{x})\|$.

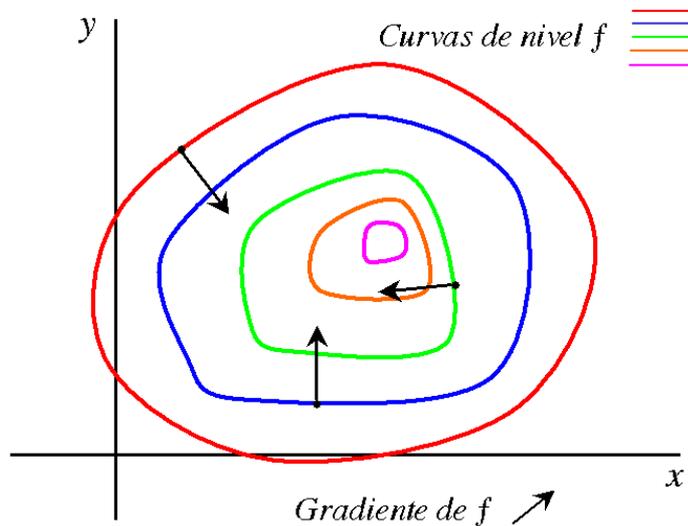
Las propiedades 2 y 3 son consecuencia de la fórmula

$$D_{\bar{u}}f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \bullet \bar{u} = \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \|\bar{u}\| \cdot \cos \theta$$

Observación 54 El vector $\nabla f(\bar{x})$ no apunta hacia el máximo de la función f , sino en la dirección en la que f crece más rápidamente.

Teorema 55 Si f es diferenciable en (x_0, y_0) y además $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) .

Teorema 56 (generalización) Si f es diferenciable en (x_1, \dots, x_n) y además $\nabla f(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ entonces $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$ es perpendicular al conjunto de nivel que pasa por (x_1, \dots, x_n) .



Ejemplo 57 Si un astronauta está sobre la superficie de la luna en el punto $(1, 1)$, y la temperatura sobre la superficie viene dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{4x^2 + y^2 + 1}$$

¿Hacia dónde debe dirigirse para que su traje espacial se enfrie más rápidamente?

Como la dirección de máximo crecimiento de la temperatura viene dada por la dirección de ∇f , entonces nos están pidiendo la dirección de $-\nabla f(1,1)$. Así

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{-8x}{(4x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{-2y}{(4x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$$

y entonces

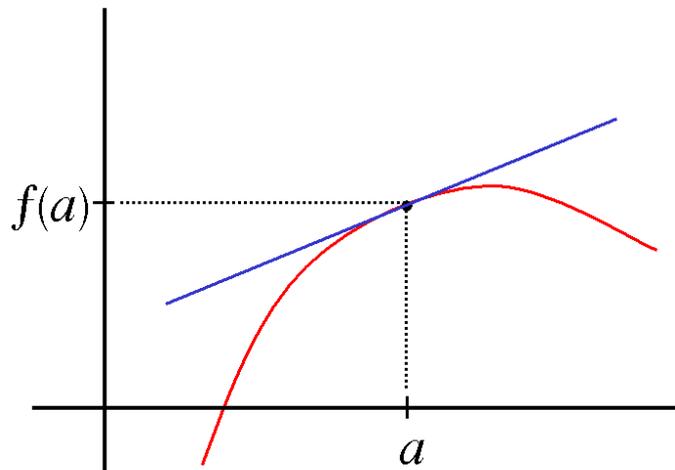
$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{-8}{36}, \frac{-2}{36} \right) = \left(\frac{-2}{9}, \frac{-1}{18} \right)$$

Por lo tanto el astronauta debe moverse en la dirección

$$-\nabla f(1, 1) = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{18} \right)$$

2.10. Plano tangente a una superficie

En el caso de una función f de una variable, es posible construir la recta tangente a la curva $y = f(x)$



Así la ecuación de la recta tangente será

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

También podemos construir el plano tangente en un punto a una superficie. Las superficies pueden venir dadas como:

1. Superficie de nivel de una función $F(x, y, z)$, así

$$F(x, y, z) = c$$

es una superficie.

2. Gráfica de una función $f(x, y)$, así

$$z = f(x, y)$$

representa una superficie. Para este segundo caso, si llamamos

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

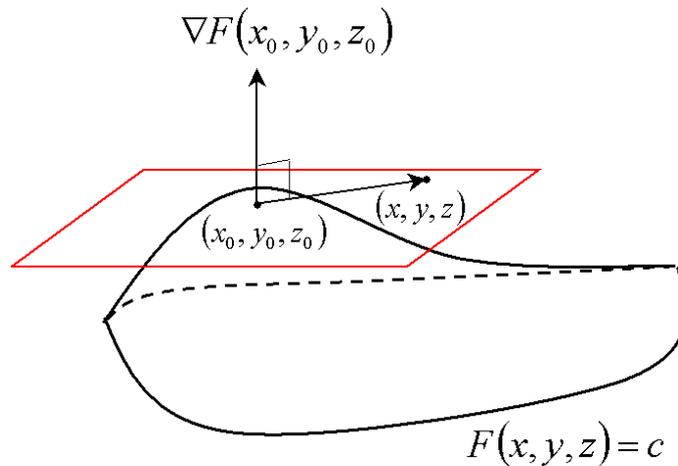
entonces la superficie definida por $z = f(x, y)$ del punto 2 es equivalente a la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$.

Dada la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ con F diferenciable, vamos a calcular la ecuación del plano tangente a $F(x, y, z) = c$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie.

Es importante comprobar que (x_0, y_0, z_0) pertenece a la superficie. Sea (x, y, z) un punto del plano tangente buscado, entonces el vector

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

también pertenece al plano tangente. Por otro lado, como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ en el punto (x_0, y_0, z_0) , entonces también será perpendicular al plano tangente en (x_0, y_0, z_0) .



Por tanto se tiene que verificar que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Esto es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

que es la ecuación del plano tangente.

En el caso que $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, entonces la ecuación queda

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Observación 58 Comparando la ecuación del plano tangente

$$(z - f(x_0, y_0)) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

con la expresión de la diferencial

$$df_{(x_0, y_0)}(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

vemos que la aproximación de

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

mediante la diferencial es equivalente a aproximarla mediante el plano tangente.

Ejemplo 59 Calcular el plano tangente a las superficies:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La superficie viene dada como la superficie de nivel 1 de

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Como se verifica que $F\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ entonces el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertenece a la superficie. Además se tiene que

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) = 2x &\implies F_x\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\ F_y(x, y, z) = 2y &\implies F_y\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \\ F_z(x, y, z) = 2z &\implies F_z\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo esos valores obtenemos que la ecuación del plano tangente queda

$$0 \cdot (x - 0) + \sqrt{2} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

es decir $\sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 2$

2. $z = e^{x+y^2}$ en el punto $(2, 2)$.

La superficie viene dada como función de 2 variables $z = f(x, y)$ donde

$$f(x, y) = e^{x+y^2}$$

Tenemos que calcular el valor de $f(2, 2) = e^{2+2^2} = e^6$. Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = e^{x+y^2} &\implies f_x(2, 2) = e^6 \\ f_y(x, y) = 2ye^{x+y^2} &\implies f_y(2, 2) = 4e^6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo esos valores obtenemos que la ecuación del plano tangente queda

$$e^6 \cdot (x - 2) + 4e^6 (y - 2) - (z - e^6) = 0$$

es decir

$$e^6 (x + 4y) - z = 9e^6$$

Capítulo 3

Diferenciabilidad: aplicaciones.

3.1. Regla de la cadena

Dada una función $f(x, y)$, a veces se tiene que las variables x e y dependen de otras variables, por ejemplo, $x(t)$ e $y(s, t, r)$. De esta manera podemos estar interesados en calcular la variación de f según varían s, t , o r , es decir, queremos derivar f respecto de s, t o r .

En general, dada una función f de varias variables, es posible que tales variables dependan de otras, y estas segundas de unas terceras, y así sucesivamente. Para poder calcular las derivadas de f respecto de las últimas variables de las que depende, necesitamos una regla para poder hacerlo en general, independientemente de las variables y de su número.

Esta regla será la regla de la cadena.

Estudiaremos las fórmulas que proporciona la regla de la cadena para algunos casos particulares, pero buscando entender su funcionamiento.

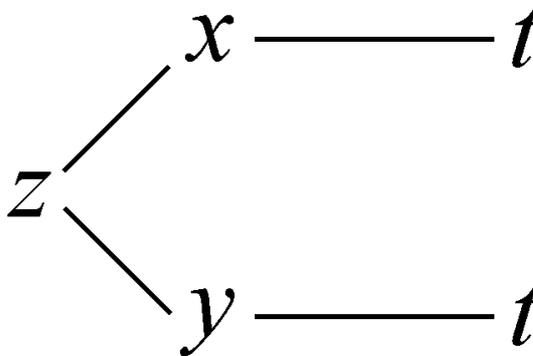
Teorema 60 Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable. Si

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

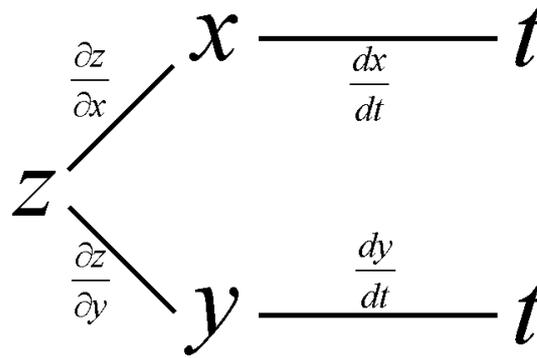
son, a su vez, funciones derivables de t , entonces f es una función derivable respecto de t con

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

Para recordar esta fórmula dibujamos el siguiente diagrama:



Cada barra del diagrama representa la derivada de la función de su izquierda respecto de la variable de su derecha. Así el diagrama representa las siguientes derivadas:



Hay dos caminos por los que se llega a la variable t . Para encontrar la fórmula hay que multiplicar las derivadas que encontremos por cada camino y sumar todos los caminos que llegan a la variable t .

- Primer camino:

$$z \rightarrow x \rightarrow t$$

así obtenemos el producto de las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t)$$

- Segundo camino:

$$z \rightarrow y \rightarrow t$$

así obtenemos el producto de las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

La suma de estos productos nos dan la fórmula

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

o con la notación anterior

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

Ejemplo 61 Considere la función

$$f(x, y) = x^2y - y^2$$

y sean las funciones $\begin{cases} x = e^t \\ y = \cos t \end{cases}$, se pide calcular la derivada de f respecto de t .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) = \\ &= (2x(t)y(t)) \cdot (e^t) + (x(t)^2 - 2y(t)) \cdot (-\sin t) = \\ &= (2e^t \cos t) \cdot (e^t) + (e^{2t} - 2\cos t) \cdot (-\sin t) = \\ &= e^{2t}(2\cos t - \sin t) + 2\cos t \sin t \end{aligned}$$

Teorema 62 Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable. Si

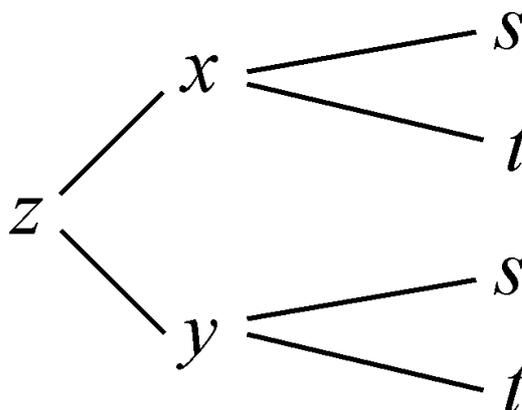
$$x = x(s, t) \qquad y = y(s, t)$$

son, a su vez, funciones tales que existen las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$ y $\frac{\partial y}{\partial t}$, entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial s}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ existen y vienen dadas por

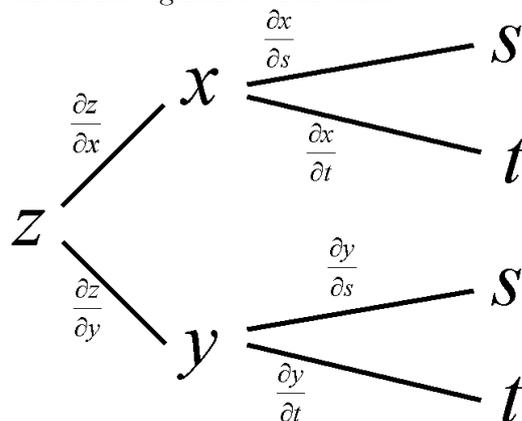
$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s, t)$$

El esquema de estas fórmulas es el siguiente:



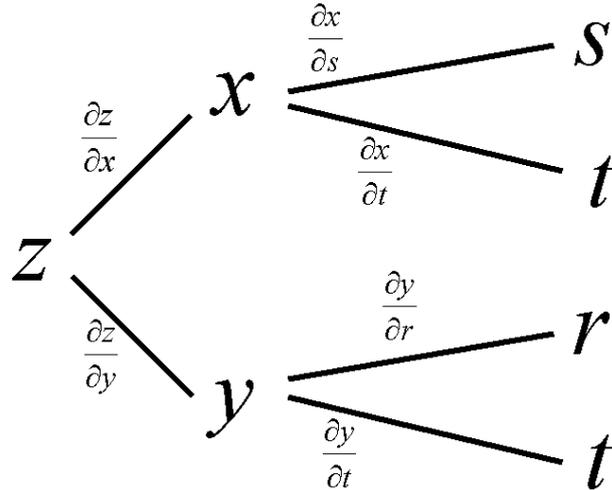
Las barras del esquema representan las siguientes derivadas:



Utilizando estos esquemas podemos encontrar las fórmulas para cualquier función, sin necesidad de tener que recordar todas las fórmulas posibles.

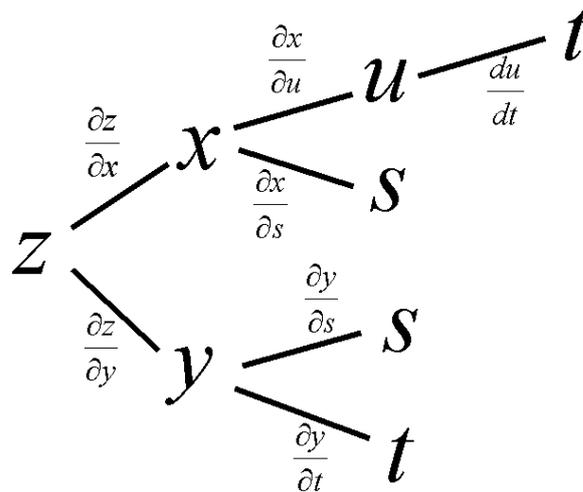
Dependiendo de las variables de cada función podemos encontrar la fórmula adecuada.

Ejemplo 63 Para este otro ejemplo, tenemos que



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s}(s, t, r) = \frac{\partial z}{\partial x}(x(s, t), y(r, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t, r) = \frac{\partial z}{\partial x}(x(s, t), y(r, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(s, t), y(r, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(r, t) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(s, t, r) = \frac{\partial z}{\partial y}(x(s, t), y(r, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}(r, t) \end{cases}$$

También



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

Cada derivada evaluada en su punto correspondiente.

Ejemplo 64 Considere la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2 e^x$$

y sean las funciones siendo $x = st$ e $y = s^2 + t^2 + 1$, se pide calcular las derivadas de f respecto de s y t .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) = \\ &= (2x - y^2 e^x) \cdot (t) + (-2y e^x)(2s) = \\ &= (2st - (s^2 + t^2 + 1)^2 e^{st}) t + (-2(s^2 + t^2 + 1) e^{st}) 2s \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s, t), y(s, t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= (2x - y^2 e^x) \cdot (s) + (-2y e^x) (2t) = \\
&= \left(2st - (s^2 + t^2 + 1)^2 e^{st} \right) s + (-2 (s^2 + t^2 + 1) e^{st}) 2t
\end{aligned}$$

Ejercicio 65 Sea $Y = F(K, L)$ una función de producción, donde Y representa la cantidad producida, K el capital y L el trabajo. Supongamos que, a su vez, el capital y el trabajo dependen del tiempo.

1. ¿Cómo varía la producción con respecto del tiempo?
2. Calcula esta variación en el caso de que F sea la función de Cobb-Douglas $F(K, L) = AK^a L^b$.
3. Si $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$, y sabiendo que $K = \frac{t}{5} + 5$ y $L = 5e^{\frac{t}{10}}$, determina $\frac{dY}{dt}$ para $t = 0$.

Ejercicio 66 Escriba el diagrama y encuentre las fórmulas de $\frac{\partial f}{\partial s}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ siendo $f(x, y, z)$ con $x(s, t)$, $y(s, t)$ y $z(s, t)$.

Ejercicio 67 Escribir el diagrama y encontrar las fórmulas de $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial r}$ siendo $f(x, y, z)$ con $x(s, t, r)$, $y(s, t, r)$ y $z(s, t, r)$.

3.2. Desarrollos de Taylor

Recordemos el siguiente teorema para funciones de una variable:

Teorema 68 Supongamos que $f(x)$ es derivable $n + 1$ veces en un intervalo al que pertenecen x y x_0 , entonces

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \\
&+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

para cierto punto c entre x y x_0 .

Este desarrollo de f se denomina Desarrollo de Taylor de f en x_0 .
El polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se llama Polinomio de Taylor de f de orden n en x_0 .

El término

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

se denomina Resto de Lagrange del desarrollo de Taylor de f de orden n en x_0 .

Este teorema se debe al matemático inglés Brook Taylor (1685 - 1731) y no se le dió importancia hasta que en 1772 el italiano Joseph Louis Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736 - 1813) lo valoró en su medida.



B. Taylor

J. L. Lagrange

Ejemplo 69 Calcular el desarrollo de Taylor de $f(x) = e^x$ de orden 5 en el punto $x_0 = 0$.
Primero calculamos las derivadas de f :

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\implies f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x &\implies f'(0) = e^0 = 1 \\ &\vdots \\ f^{(5)}(x) = e^x &\implies f^{(5)}(0) = e^0 = 1 \\ f^{(6)}(x) = e^x &\implies f^{(6)}(c) = e^c \end{aligned}$$

y lo sustituimos en la fórmula

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \dots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}(x-0)^6 = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{e^c x^6}{720} \end{aligned}$$

Ejemplo 70 Calcular el polinomio de Taylor de $f(x) = \ln x$ de orden n en el punto $x_0 = 1$.
Primero calculamos las derivadas de f :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{x} &\implies f'(1) = 1 \\ f''(x) = \frac{-1}{x^2} &\implies f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} &\implies f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} &\implies f^{(4)}(1) = -6 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} &\implies f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)! \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \end{aligned}$$

Ejemplo 71 Aproximar el valor de $\log(1/1)$ mediante los polinomios de Taylor de órdenes 0, 1, 2, 3 y 4 calculados en el ejemplo anterior.

Orden 0: $P_0(x) = 0$.

Así

$$\log(1'1) = f(1'1) \approx P_0(1'1) = 0$$

Orden 1: $P_1(x) = x - 1$.

Así

$$\log(1'1) = f(1'1) \approx P_1(1'1) = 1'1 - 1 = 0'1$$

Orden 2: $P_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

Así

$$\log(1'1) = f(1'1) \approx P_2(1'1) = 0'1 - \frac{1}{2}(0'1)^2 = 0'095$$

Orden 3: $P_3(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$.

Así

$$\log(1'1) = f(1'1) \approx P_3(1'1) = 0'095 + \frac{1}{3}(0'1)^3 = 0'095333\dots$$

Orden 4: $P_4(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$.

Así

$$\log(1'1) = f(1'1) \approx P_4(1'1) = 0'095333\dots - \frac{1}{4}(0'1)^4 = 0'0953083$$

El valor real de $\log(1'1) = 0,09531017980\dots$

Observación 72 En el ejemplo anterior y según la definición del polinomio de Taylor se observa que

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Es posible definir el desarrollo de Taylor para funciones de varias variables. Para ello tendremos que adaptar la fórmula utilizando las derivadas parciales. Además el polinomio de Taylor será un polinomio de varias variables.

Teorema 73 (Polinomio de Taylor de orden 1)

Supongamos que $f(x, y)$ tiene todas sus derivadas parciales continuas hasta el orden 2, entonces dado (x_0, y_0) se tiene que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1(x, y)$$

y este desarrollo se denomina Desarrollo de Taylor de f de orden 1 en (x_0, y_0) . Además

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

es el Polinomio de Taylor de f de orden 1 en (x_0, y_0) y

$$R_1(x, y)$$

es el Resto de Lagrange que está compuesto por las derivadas parciales segundas de f en un punto que está sobre el segmento que une (x, y) con (x_0, y_0) .

La definición para el caso de una función f general será:

Teorema 74 (Polinomio de Taylor de orden 1)

Supongamos que $f(x_1, \dots, x_n)$ tiene todas sus derivadas parciales continuas hasta el orden 2, entonces dado (x_1^0, \dots, x_n^0) se tiene que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \nabla f(x_1^0, \dots, x_n^0) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + R_1(x_1, \dots, x_n)$$

y este desarrollo se denomina Desarrollo de Taylor de f de orden 1 en (x_1^0, \dots, x_n^0) . Además

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \nabla f(x_1^0, \dots, x_n^0) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}$$

es el Polinomio de Taylor de f de orden 1 en (x_1^0, \dots, x_n^0) y

$$R_1(x_1, \dots, x_n)$$

es el Resto de Lagrange que está compuesto por las derivadas parciales segundas de f en un punto que está sobre el segmento que une (x_1, \dots, x_n) con (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Observación 75 Para definir el desarrollo de Taylor de orden 1 hemos supuesto continuas todas las derivadas parciales hasta el orden 2, pero si lo que queremos es definir el polinomio de Taylor de orden n , únicamente es necesario que existan las derivadas parciales de orden 1 en un entorno del punto (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Observación 76 Como veremos a continuación, este hecho también se da para el desarrollo de Taylor de orden 2, es decir en su definición necesitamos la continuidad de las derivadas parciales hasta el orden 3 pero para definir el polinomio de Taylor de orden 2 es suficiente la existencia de derivadas parciales hasta el orden 2 en un entorno de (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Teorema 77 (Polinomio de Taylor de orden 2)

Supongamos que $f(x, y)$ tiene todas sus derivadas parciales continuas hasta el orden 3, entonces dado (x_0, y_0) se tiene que

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] + R_2(x, y) \end{aligned}$$

y este desarrollo se denomina Desarrollo de Taylor de f de orden 2 en (x_0, y_0) .

Además

$$\begin{aligned} P_2(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] \end{aligned}$$

es el Polinomio de Taylor de f de orden 2 en (x_0, y_0) y

$$R_2(x, y)$$

es el Resto de Lagrange que está compuesto por las derivadas parciales terceras de f en un punto que está sobre el segmento que une (x, y) con (x_0, y_0) .

La definición para el caso de una función f general será:

Teorema 78 (Polinomio de Taylor de orden 2)

Supongamos que $f(x_1, \dots, x_n)$ tiene todas sus derivadas parciales continuas hasta el orden 3, entonces dado (x_1^0, \dots, x_n^0) se tiene que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \nabla f(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2} (x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) \cdot Hf(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + R_2(x_1, \dots, x_n)$$

y este desarrollo se denomina Desarrollo de Taylor de f de orden 2 en (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Además

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \nabla f(x_1^0, \dots, x_n^0) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2} (x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) \cdot Hf(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix}$$

es el Polinomio de Taylor de f de orden 2 en (x_1^0, \dots, x_n^0) y

$$R_1(x_1, \dots, x_n)$$

es el Resto de Lagrange que está compuesto por las derivadas parciales terceras de f en un punto que está sobre el segmento que une (x_1, \dots, x_n) con (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Ejemplo 79 Calcular los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ para la función $f(x, y) = \sin(x + 2y)$.

Para calcular el polinomio de orden 1 $P_1(x, y)$ necesitamos el valor de f y de las derivadas primeras en el punto $(0, 0)$, así

$$f(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x + 2y) \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \cos(x + 2y) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2$$

por lo tanto

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) = \\ = 0 + 1(x - 0) + 2(y - 0) = x + 2y$$

Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 necesitamos las derivadas segundas de f en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\operatorname{sen}(x + 2y) &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -2 \operatorname{sen}(x + 2y) &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) && T. \text{ de Schwarz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -4 \operatorname{sen}(x + 2y) &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto

$$P_2(x, y) = P_1(x, y) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot y^2 \right]$$

entonces

$$P_2(x, y) = x + 2y + \frac{1}{2} [0x^2 + 0xy + 0y^2] = x + 2y$$

Ejemplo 80 Calcular los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ para la función $f(x, y) = e^x \cos y$.

Para calcular $P_1(x, y)$ necesitamos el valor de f y de las derivadas primeras en el punto $(0, 0)$, así

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y &\implies \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y &\implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}P_1(x, y) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) = \\ &= 1 + 1(x - 0) + 0(y - 0) = 1 + x\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas de f en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= e^x \cos y &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) && T. \text{ de Schwarz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -e^x \cos y &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= -1\end{aligned}$$

por lo tanto

$$P_2(x, y) = P_1(x, y) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot y^2 \right]$$

entonces

$$P_2(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2} [1x^2 + 0xy - 1y^2] = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

Observación 81

Ejercicio: ¿Con qué otra fórmula podría relacionar la fórmula del polinomio de Taylor?

Ejercicio: ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 1 de

$$f(x, y) = A + Bx + Cy$$

en $(0, 0)$?m ¿Y el polinomio de Taylor de orden 2 de

$$f(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

en $(0, 0)$?

Capítulo 4

Funciones implícitas

4.1. Introducción

Si tenemos una ecuación del tipo

$$F(x, y) = 0$$

nos podemos preguntar si podemos despejar una variable en función de la otra, es decir, si podemos encontrar una función f tal que

$$y = f(x)$$

sea equivalente a ecuación original.

Ejemplo 82 *Si tenemos la ecuación*

$$x^3 + y^3 - 1 = 0$$

podemos despejar la variable y en función de la variable x como

$$y = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

Según la RAE,

- **EXPLÍCITO:** adj. Que expresa clara y determinantemente una cosa.
- **IMPLÍCITO:** adj. Dícese de lo incluido en otra cosa sin que esta lo exprese.

Hemos visto que los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican que $y = f(x)$ (función explícita) son los mismos que verifican que $F(x, y) = f(x) - y = 0$ (función implícita).

Ejemplo 83 *Si $y = \ln x$ es una función explícita, entonces si definimos*

$$F(x, y) = \ln x - y$$

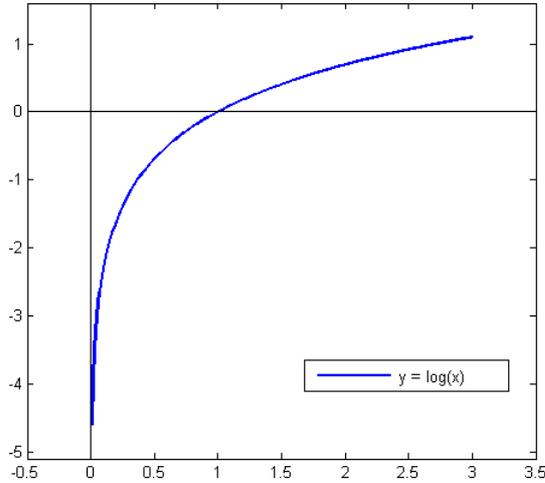
la ecuación

$$F(x, y) = 0 \iff \ln x - y = 0$$

define una función implícitamente.

También $G(x, y) = x - e^y = 0$ define implícitamente la misma función, ya que

$$G(x, f(x)) = x - e^{\ln x} = x - x = 0$$



¿Todas las funciones definidas implícitamente ($F(x, y) = 0$) pueden escribirse explícitamente ($y = f(x)$)? Es decir, ¿a partir de $F(x, y) = 0$ podemos calcular $y = f(x)$?

La respuesta a ambas preguntas es **NO**:

1. No todas las ecuaciones definen implícitamente una función, por ejemplo,

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

no define ninguna función en ningún punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. No todas las funciones dadas implícitamente pueden escribirse explícitamente, es decir, no pueden despejarse, por ejemplo,

$$x - 2 \ln x + y - 2 \ln y - 2 = 0$$

no se puede despejar aunque existe $y = f(x)$ que verifica la ecuación.

4.2. Teorema de la función implícita

En este tema veremos condiciones suficientes para determinar si dada una ecuación $F(x, y) = 0$, existe una función $y = f(x)$ que verifica la ecuación.

En otras palabras, estudiaremos condiciones suficientes para determinar si la curva de nivel $F(x, y) = 0$ puede describirse mediante una función $y = f(x)$ cerca de un punto (x_0, y_0) que pertenece a dicha curva de nivel.

Teorema 84 (*Función implícita para dos variables*)

Si $F(x, y)$ es una función con derivadas parciales continuas y para (x_0, y_0) se tiene que

$$F(x_0, y_0) = c$$

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

entonces existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

1. Para cada $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la ecuación

$$F(x, y) = c$$

tiene una única solución en el intervalo $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

2. Si esta única solución es $f(x)$, entonces la función $y = f(x)$ tiene derivada continua en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dada por

$$f'(x) = \frac{-F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

Observación 85 Las condiciones anteriores son condiciones suficientes, es decir, si alguna condición no se cumple, entonces no podemos descartar ninguna posibilidad, simplemente no podremos utilizar el teorema.

Es posible intercambiar el papel de las variables x e y en el teorema, en este caso el teorema quedaría de la siguiente manera:

Teorema 86 (Función implícita para dos variables, versión 2)

Si $F(x, y)$ es una función con derivadas parciales continuas y para (x_0, y_0) se tiene que

$$F(x_0, y_0) = c$$

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0$$

entonces existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

1. Para cada $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, la ecuación

$$F(x, y) = c$$

tiene una única solución en el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

2. Si esta única solución es $g(y)$, entonces la función $x = g(y)$ tiene derivada continua en el intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ dada por

$$g'(y) = \frac{-F_y(x, f(x))}{F_x(x, f(x))}$$

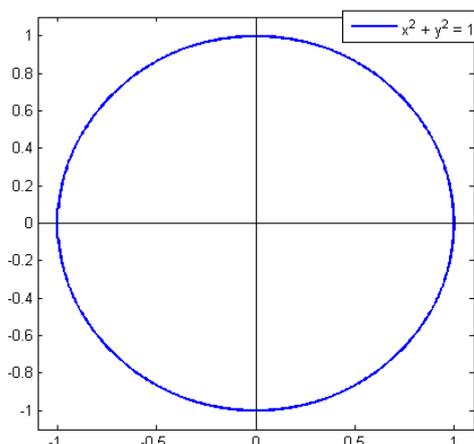
Ejemplo 87 Consideremos la función

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

entonces la curva de nivel 0 dada por $F(x, y) = 0$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

está descrita por la circunferencia de radio 1



Verifiquemos las hipótesis del Teorema de la función implícita en el punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ para la ecuación anterior.

Las derivadas parciales de $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ son

$$F_x(x, y) = 2x \qquad F_y(x, y) = 2y$$

que al ser polinómicas también son continuas.

Por otro lado se tiene que

$$F(0, 1) = 0^2 + 1^2 - 1 = 0$$

y como además $F_y(x, y) = 2y$ entonces

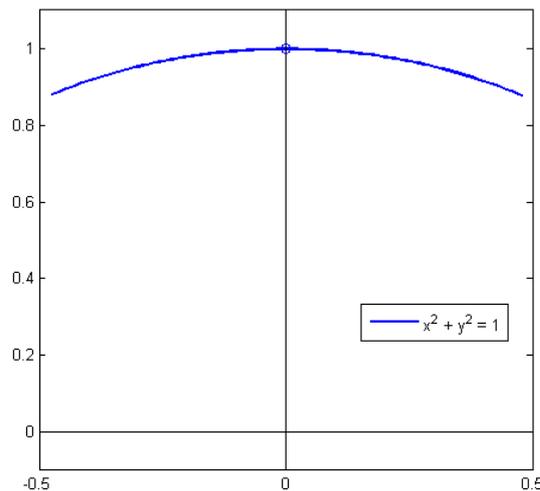
$$F_y(0, 1) = 2 \neq 0$$

Entonces se verifican las hipótesis del teorema y podemos aplicarlo.

La conclusión del teorema nos dice que existe un intervalo $(-\delta, \delta)$ y una única función $f(x)$ definida en $(-\delta, \delta)$ tal que

$$F(x, f(x)) = 0$$

para todo $x \in (-\delta, \delta)$.



El Teorema de la función implícita también nos permite calcular la derivada de f en $x = x_0$. En efecto,

$$f'(0) = \frac{-F_x(0, 1)}{F_y(0, 1)} = \frac{-0}{2} = 0$$

¿Qué sucede en el punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$?

Resulta que

$$F(1, 0) = 1^2 + 0^2 - 1 = 0$$

pero la tercera hipótesis no se verifica ya que

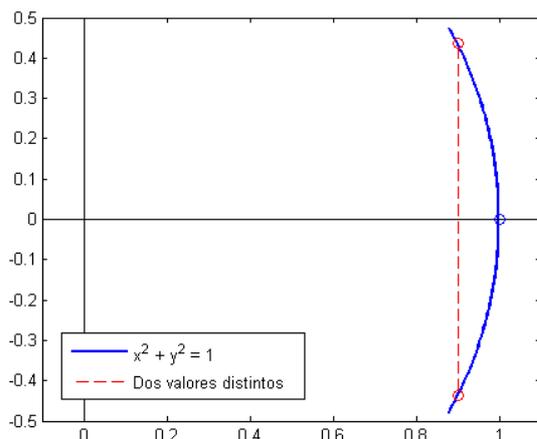
$$F_y(1, 0) = 0$$

y por tanto no podemos aplicar el teorema.

¿Podemos concluir entonces que no existe la función f buscada cerca de $(1, 0)$?

No, tendremos que estudiarlo sin utilizar el teorema.

Veamos la curva de nivel cerca del punto $(1, 0)$.

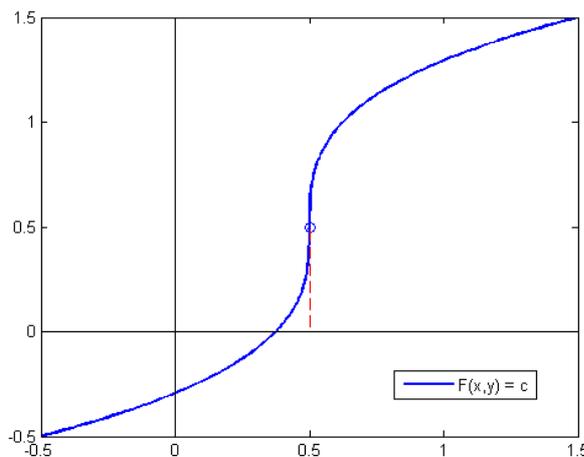


Como $F_y(1, 0) = 0$ entonces el vector tangente en $(1, 0)$ es vertical y observamos que no puede existir la función f ya que cerca de $x = 1$, a su izquierda, la función f tendría que tener dos valores para cada punto $x < 1$ cercano.

Ejemplo 88 ¿Podría suceder que $F_y(x_0, y_0) = 0$ y existir la función $f(x)$ tal que

$$F(x, f(x)) = 0$$

para valores cercanos a $x = x_0$? Sí, cuando la gráfica de la función sea de la siguiente forma:



Teorema 89 (Función implícita para tres variables)

Si $F(x, y, z)$ es una función con derivadas parciales continuas y para (x_0, y_0, z_0) se tiene que

$$F(x_0, y_0, z_0) = c \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

entonces existen $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ y una función $f(x, y)$ definida para los (x, y) tales que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ que verifican que

1. $f(x_0, y_0) = z_0$

2. Para todo (x, y) tal que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ se tiene que

$$F(x, y, f(x, y)) = c$$

3. $z = f(x, y)$ es la única solución de $F(x, y, z) = c$ que pertenece al intervalo $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$.
4. La función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas que vienen dadas por

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}$$

En otras palabras, la ecuación $F(x, y, z) = c$ define implícitamente a la variable z como una función f en las variables x, y cerca de (x_0, y_0) y de manera única.

Ejemplo 90 ¿La ecuación $(x - y)^3 = 0$ define a la variable y como función implícita de x cerca del punto $(0, 0)$?

Veamos si podemos aplicar el Teorema de la función implícita. Si $F(x, y) = (x - y)^3$, sus derivadas parciales

$$F_x(x, y) = 3(x - y)^2 \quad F_y(x, y) = -3(x - y)^2$$

son continuas por ser polinomios. Por otro lado el punto $(0, 0)$ pertenece a la curva de nivel 0 de F , es decir

$$F(0, 0) = 3(0 - 0)^2 = 0$$

pero falla la condición sobre la derivada en $(0, 0)$ ya que

$$F_y(0, 0) = -3(0 - 0)^2 = 0$$

por lo que no podemos aplicar el teorema. En este caso no haría falta ya que podemos despejar:

$$(x - y)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{(x - y)^3} = 0$$

$$x - y = 0$$

$$y = x$$

que es la solución de la ecuación, por lo que $y = f(x) = x$ es la única solución.

Ejemplo 91 De la ecuación

$$x - 2 \log x + y - 2 \log y - 2 = 0$$

no se puede despejar ninguna variable en función de la otra. Pero ¿define a una variable como función implícita de la otra?

Veamos que la ecuación define a x como función implícita de y en el punto $(1, 1)$. Sea $F(x, y) = x - 2 \log x + y - 2 \log y - 2$, entonces

$$F_x(x, y) = 1 - \frac{2}{x} \quad F_y(x, y) = 1 - \frac{2}{y}$$

que son continuas en $(1, 1)$. Además

$$F(1, 1) = 1 - 2 \log 1 + 1 - 2 \log 1 - 2 = 0$$

$$F_y(1, 1) = 1 - \frac{2}{1} = -1 \neq 0$$

por lo que aplicando el Teorema de la función implícita tenemos que existe una función f definida en un intervalo que contiene a $x = 1$ tal que $y = f(x)$ es la única solución de la ecuación $F(x, y) = 0$.

¿Es posible calcular $f'(x)$?

Si $x - 2 \log x + y - 2 \log y - 2 = 0$ entonces como $y = f(x)$ derivando con respecto de x obtenemos

$$1 - \frac{2}{x} + y' - 2\frac{y'}{y} = 0$$

$$y' \left(1 - \frac{2}{y}\right) = -\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$y' = \frac{-\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\left(1 - \frac{2}{y}\right)}$$

y por tanto en el punto $x = 1$ se tiene que

$$y'(1) = \frac{-\left(1 - \frac{2}{1}\right)}{\left(1 - \frac{2}{y(1)}\right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

En el ejemplo anterior hemos visto que podemos encontrar la derivada de la función f utilizando la técnica denominada derivación implícita.

Volveremos a utilizarla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 92 Sea la función

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$$

¿existe solución $z = f(x, y)$ de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 0, 1)$?

Veamos si podemos aplicar el Teorema de la función implícita. Las derivadas parciales de F son:

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$

$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$

$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

que son continuas por ser polinomios. Además

$$F(1, 0, 1) = 3 - 0 + 2 + 0 - 5 = 0$$

y

$$F_z(1, 0, 1) = 3 + 6 = 9 \neq 0$$

por lo que aplicando el Teorema de la función implícita tenemos que en un entorno de $(1, 0, 1)$ existe una función f tal que $z = f(x, y)$ es la solución de la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

Vamos a calcular el gradiente de f .

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (z_x, z_y)$$

Derivando la ecuación $F(x, y, z) = 0$ (aplicando también la regla de la cadena) respecto de x se tiene

$$6xz + 3x^2z_x - 2xy^2 + 6z^2z_x + 3yz_x = 0$$

y despejando z_x obtenemos

$$z_x = \frac{-6xz + 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

De igual manera, derivando $F(x, y, z) = 0$ respecto de y se tiene

$$3x^2z_y - 2x^2y + 6z^2z_y + 3z + 3yz_y = 0$$

y despejando z_y llegamos a

$$z_y = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

Como $z(1, 0) = 1$ entonces

$$z_x(1, 0) = \frac{-6 + 0}{3 + 6 + 0} = \frac{-2}{3}$$

$$z_y(1, 0) = \frac{0 - 3}{3 + 6 + 0} = \frac{-1}{2}$$

por lo tanto

$$\nabla f(1, 0) = \left(\frac{\partial f(1, 0)}{\partial x}, \frac{\partial f(1, 0)}{\partial y} \right) = (z_x(1, 0), z_y(1, 0)) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2} \right)$$

Con este resultado podemos calcular la ecuación del plano tangente a f en $(1, 0)$ (es decir, el plano tangente a la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$ en $(1, 0, 1)$). Así

$$\frac{\partial f(1, 0)}{\partial x} (x - 1) + \frac{\partial f(1, 0)}{\partial y} (y - 0) - (z - 1) = 0$$

$$\frac{-2}{3} (x - 1) - \frac{1}{2} (y - 0) - (z - 1) = 0$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + z = \frac{5}{3}$$

$$4x + 3y + 6z = 10$$

Ejercicio 93 1. Comprobar si es posible, mediante la aplicación del Teorema de la función implícita, si las siguientes ecuaciones definen a y como función implícita de x en los respectivos puntos. ¿Definen a x como función implícita de y en los mismos puntos?

a) $1 + x - y + 2xy = 3$ en el punto $(1, 1)$.

b) $xy + e^{xy} = 1$ en el punto $(0, 0)$.

2. Determinar si la ecuación

$$xyz - z^2y^7 + 2x - z = 1$$

define a y como función implícita de (x, z) en el punto $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. En caso afirmativo calcular las derivadas de y respecto de x y de z en el punto $(x, z) = (1, 1)$.

4.3. Aplicación del Teorema de la función implícita a la Economía

Sea

$$f(t, P)$$

la función de la demanda de un bien que depende de

P el precio unitario sin impuestos

t el IVA unitario

Supongamos que

$$S = g(P)$$

es la función de la oferta de ese bien.

Queremos que haya equilibrio en el mercado, es decir

$$\text{OFERTA} = \text{DEMANDA}$$

$$f(t, P) = g(P)$$

Si la ecuación de equilibrio define al precio P como función implícita de t , es decir, el precio al que se debe poner al bien para obtener dicho equilibrio es una función de t , entonces podemos calcular cómo varía el precio P con respecto del impuesto t , es decir

$$\frac{dP}{dt}$$

En efecto, definimos la función

$$F(t, P) = f(t, P) - g(P)$$

y así la ecuación

$$F(t, P) = 0$$

es equivalente a la ecuación de equilibrio. Como hemos supuesto que esta ecuación define a P como función implícita de t , entonces

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-F_t(t, P)}{F_P(t, P)} = \frac{-f_t(t, P)}{f_P(t, P) - g'(P)} = \frac{f_t(t, P)}{g'(P) - f_P(t, P)}$$

Es razonable suponer que

$$g'(P) > 0$$

ya que si aumenta el precio aumentará la oferta.

Por otro lado puedo suponer que

$$f_t(t, P) < 0 \quad f_P(t, P) < 0$$

ya que la demanda disminuye si se aumenta el impuesto t . Por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = \frac{f_t(t, P)}{g'(P) - f_P(t, P)} < 0$$

lo que implica que el precio P tendrá que decrecer si se aumenta el impuesto t para mantener el equilibrio.

Capítulo 5

Funciones homogéneas

5.1. Funciones homogéneas

Un tipo de funciones importantes que aparecen en Economía son las funciones homogéneas. Las funciones de producción de Cobb-Douglas son de este tipo.

Definición 94 (Función homogénea) Diremos que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado k si verifica

$$f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$$

para todo $t > 0$.

Observación 95 La definición en el caso de funciones de n variables es análoga.

Observación 96 La interpretación de esta definición es que si multiplicamos las variables x e y por un mismo número $t > 0$, entonces el valor $f(tx, ty)$ será el mismo que el de $f(x, y)$ multiplicado por t^k .

Además, para la definición, no es necesaria la diferenciabilidad (ni siquiera la continuidad) de f .

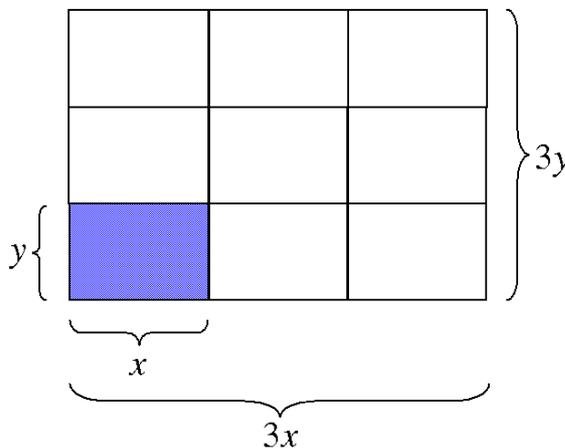
Ejemplo 97 Sea la función $A(x, y) = xy$ que describe el área de un rectángulo de base x y de altura y , entonces si multiplicamos la base y la altura por un mismo número (p.e. $t = 3$) entonces el área del rectángulo resultante es $t^2 = 3^2 = 9$ veces el área original:

$$A(3x, 3y) = 3^2 A(x, y)$$

en general

$$A(tx, ty) = t^2 A(x, y)$$

por lo que A es una función homogénea de grado 2.



Ejemplo 98 La función de producción de Cobb-Douglas

$$F(x, y) = Cx^a y^b$$

donde $C, a, b \in \mathbb{R}$ verifica que

$$\begin{aligned} F(tx, ty) &= C(tx)^a (ty)^b = Ct^a x^a t^b y^b = \\ &= t^{a+b} Cx^a y^b = t^{a+b} F(x, y) \end{aligned}$$

por lo que F es una función homogénea de grado $a + b$.

Teorema 99 (Euler) Sea $f(x, y)$ una función diferenciable. La función $f(x, y)$ es homogénea de grado k si y sólo si

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k \cdot f(x, y)$$

Este teorema se debe a uno de los más grandes matemáticos de la Historia, el suizo Leonhard Euler (1707 - 1783).



Ejemplo 100 Veamos que la función de producción de Cobb-Douglas

$$F(x, y) = Cx^a y^b$$

es homogénea utilizando el teorema de Euler.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= aCx^{a-1}y^b \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= bCx^a y^{b-1} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x(aCx^{a-1}y^b) + y(bCx^a y^{b-1}) = \\ &= aCx^a y^b + bCx^a y^b = (a + b)Cx^a y^b = (a + b)F(x, y) \end{aligned}$$

por lo que tenemos que F es homogénea.

Proposición 101 (Propiedades) Sea f una función homogénea de grado k ,

1. Las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son homogéneas de grado $k - 1$.

$$2. \quad f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = y^k f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \text{ para } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$3. \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k(k-1) f(x, y)$$

Ejemplo 102 Veamos que $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ es homogénea y verifica las propiedades anteriores.

1. f homogénea (por la definición):

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 3(tx)^2(ty) - (ty)^3 = 3t^2x^2ty - t^3y^3 = \\ &= 3t^3x^2y - t^3y^3 = t^3(3x^2y - y^3) = t^3f(x, y) \end{aligned}$$

por lo que f es homogénea de grado 3.

2. f homogénea (por el teorema de Euler):

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x(6xy) + y(3x^2 - 3y^2) = \\ &= 9x^2y - 3y^3 = 3(3x^2y - y^3) = 3f(x, y) \end{aligned}$$

por lo que f es homogénea de grado 3.

3. $\frac{\partial f}{\partial x}$ es homogénea:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = 6(tx)(ty) = 6t^2xy = t^2 6xy = t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

así tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es homogénea de grado 2.

4. $\frac{\partial f}{\partial y}$ es homogénea:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = 3(tx)^2 - 3(ty)^2 = t^2(3x^2 - 3y^2) = t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

así tenemos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es homogénea de grado 2.

5. Propiedad 2:

$$\begin{aligned} x^3 f\left(1, \frac{y}{x}\right) &= x^3 \left(3(1^2) \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right) = x^3 \left(3 \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}\right) = \\ &= 3 \frac{x^3y}{x} - \frac{x^3y^3}{x^3} = 3x^2y - y^3 = f(x, y) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} y^3 f\left(\frac{x}{y}, 1\right) &= y^3 \left(3 \left(\frac{x}{y}\right)^2 1 - (1)^3\right) = y^3 \left(3 \frac{x^2}{y^2} - 1\right) = \\ &= 3 \frac{x^2y^3}{y^2} - y^3 = 3x^2y - y^3 = f(x, y) \end{aligned}$$

Ejercicio 103 Comprobar la propiedad 3 para la función

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3$$