TEMA 3
FUNCIONES

3.1. Concepto de función. Dominio, recorrido y gráfica.

- ## 3.1.1. Concepto de función

Una función es una relación establecida entre dos variables que asocia a cada valor de la primera variable (variable independiente *x*), un único valor de la segunda variable (variable dependiente *y*).
Esta relación se representa mediante *y = f(x)*.

EJEMPLOS: sea un vehículo que circula 100 km/h de forma constante

a) RELACIÓN 1: hora del viaje y temperatura exterior
b) RELACIÓN 2: hora del viaje y kilómetros recorridos

Una función real de variable real es una función en la que tanto los valores de la variable dependiente como los de la variable independiente son números reales. Se suele expresar mediante

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$x\rightarrow y=f(x).$$

A $f(x)$ se la denomina la imagen de x por la función f.

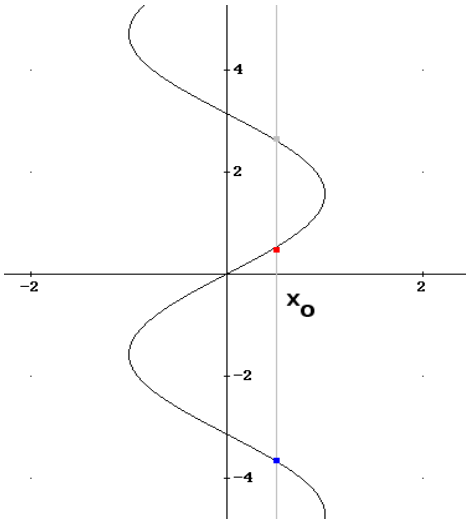
3.1. Concepto de función. Dominio, recorrido y gráfica.

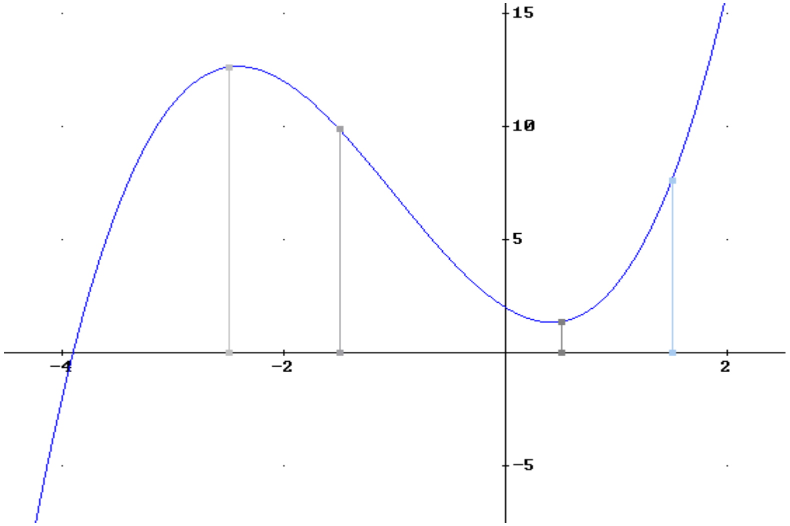
- ## 3.1.1. Concepto de función: formas de determinar las funciones

Las funciones se pueden determinar de varias formas:

- Mediante una **tabla de valores** .
- Mediante su **expresión analítica.**
- Mediante su **gráfica**.

No todas las curvas del plano se corresponden con la gráfica de una función. .





3.1. Concepto de función. Dominio, recorrido y gráfica.

• 3.1.2. Dominio o campo de existencia

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se define el **dominio** o **campo de existencia** de la función como el conjunto de números reales *x* para los cuales existe *f(x)*. Se representa mediante $Dom(f)$.

$$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,existe\ \ f(x)\}.$$

EJEMPLOS: Calculemos el dominio de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

b)

Horas	1	2	3	4	5
°C	29	28	28	25	24

c) $h(x)=\sqrt{x}$

Si una función viene determinada por una fórmula, para obtener el dominio de la función debemos tener en cuenta, las restricciones que tienen las operaciones algebraicas con números reales:

- No está permitido dividir ningún número real por 0.
- Se permiten radicales de índice par sólo si el radicando es mayor o igual a 0.
- Se permiten logaritmos sólo si el argumento es mayor estricto que 0

Otros motivos:

- Por el contexto del problema del cual se ha extraído la función.
- Por voluntad o interés de quien propone la función.

3.1. Concepto de función. Dominio, recorrido y gráfica.

• 3.1.3. Recorrido de una función.

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se define el **recorrido** o **imagen** de la función como el conjunto de números reales que resultan al calcular la imagen de todos los valores del dominio. Se representa mediante *Rec*(*f*) o *Im*(*f*). En términos formales:

$$Rec(f)=\{y\in\mathbb{R}\,/\,\text{existe } x\in Dom(f) \text{ tal que } f(x)=y\}.$$

EJEMPLO: Calculemos el recorrido de

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ b)

Horas	1	2	3	4	5
ºC	29	28	28	25	24

c) $h(x)=\sqrt{x}$

• 3.1.4. Gráfica de una función

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se define la **gráfica** de la función como el conjunto de pares (*x*,*y*) tales que *y* = *f*(*x*), siendo *x* un elemento del dominio de la función. Se suele representar mediante $Gr(f)=\{(x,y)\,/\,y=f(x), \text{para todo } x\in Dom(f)\}$.

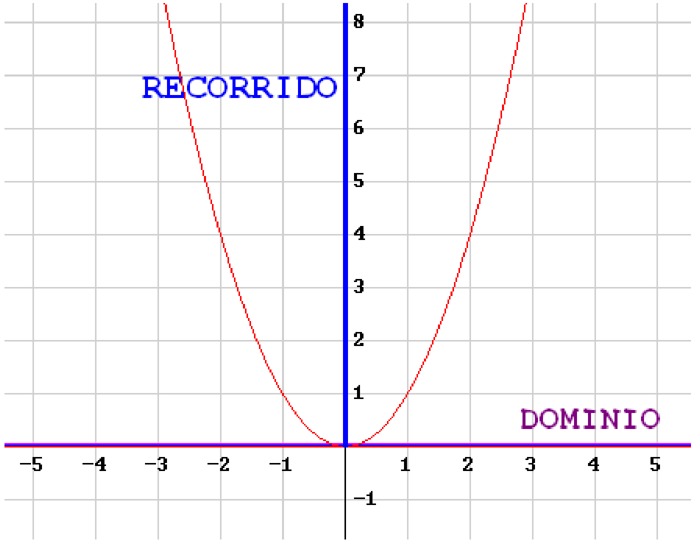
EJEMPLO: Gráfica de las funciones anteriores.

3.1. Concepto de función. Dominio, recorrido y gráfica.

3.1.5. Obtención del dominio y recorrido de una función mediante su gráfica

El DOMINIO de una función se puede obtener proyectando sobre el eje X cada uno de los puntos de la gráfica.

El RECORRIDO de una función se puede obtener proyectando sobre el eje Y cada uno de los puntos de la gráfica



3.1. EJERCICIOS

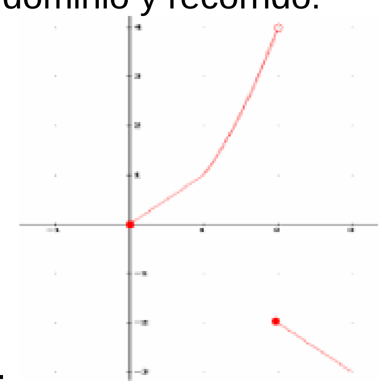
1. A partir de los siguientes enunciados determina las variables dependientes e independientes y la función que establece dicha dependencia.
   - El coste de consumo de electricidad que se factura con la siguiente regla: un coste fijo de 11,78 € por la potencia contratada y 0,092834 € por kWh.
   - El importe a pagar en una gasolinera en la que cada litro de gasolina se cobra a 1,14 €.
   - La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y *x* cm respectivamente.

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

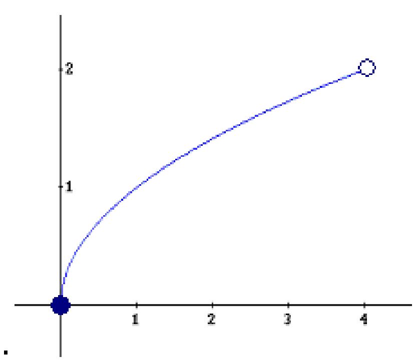
   a. $f(x)=x^2-1$ b. $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ c. $h(x)=\sqrt{x+2}$ d. $j(x)=\sqrt[4]{x^2-2x+1}$ e. $k(x)=\sqrt{2x-1}\sqrt{3x+2}$

3. Dada la función $f(x)=-x^2+2x$, construye una tabla para los valores de x: –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y representa dichos pares en los ejes de coordenadas. A partir de la representación, ¿podrías perfilar la gráfica de la función?

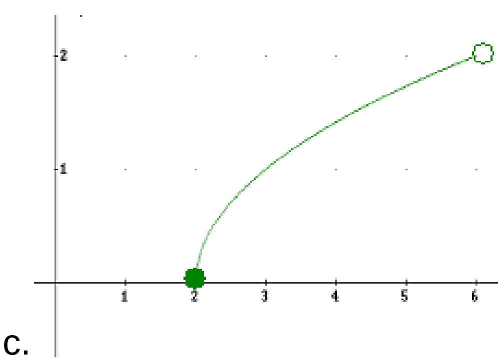
4. Las siguientes curvas son las gráficas de varias funciones. Determina para cada una de ellas su dominio y recorrido:



a.



b.



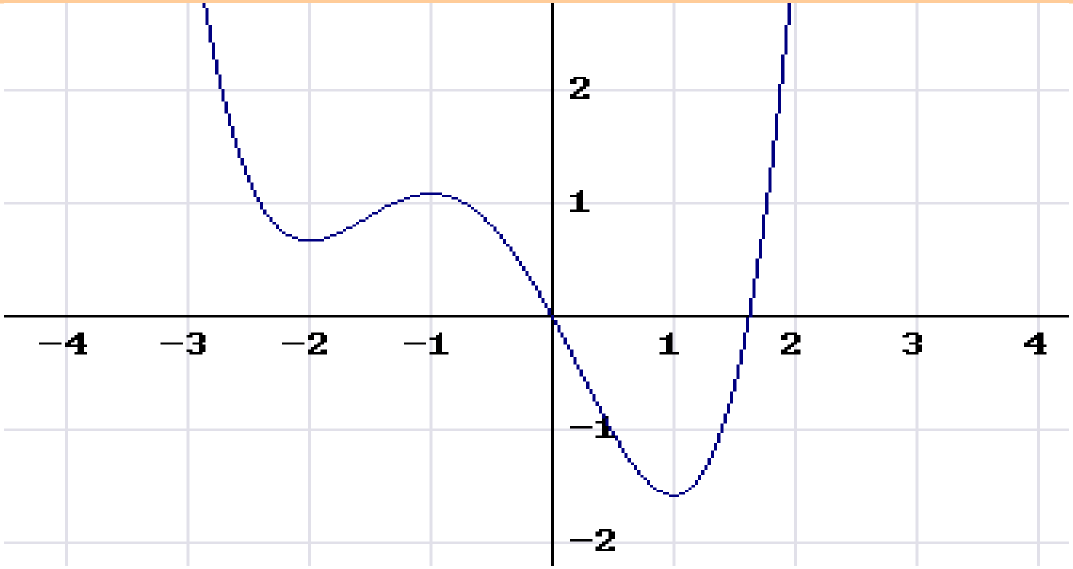
c.

3.2. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- 3.2. Crecimiento y decrecimiento. (Estricto)

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diremos que *f* es **estrictamente creciente** en un intervalo (*a*,*b*) si para todos los pares de valores x_1, x_2 de dicho intervalo se verifica que $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

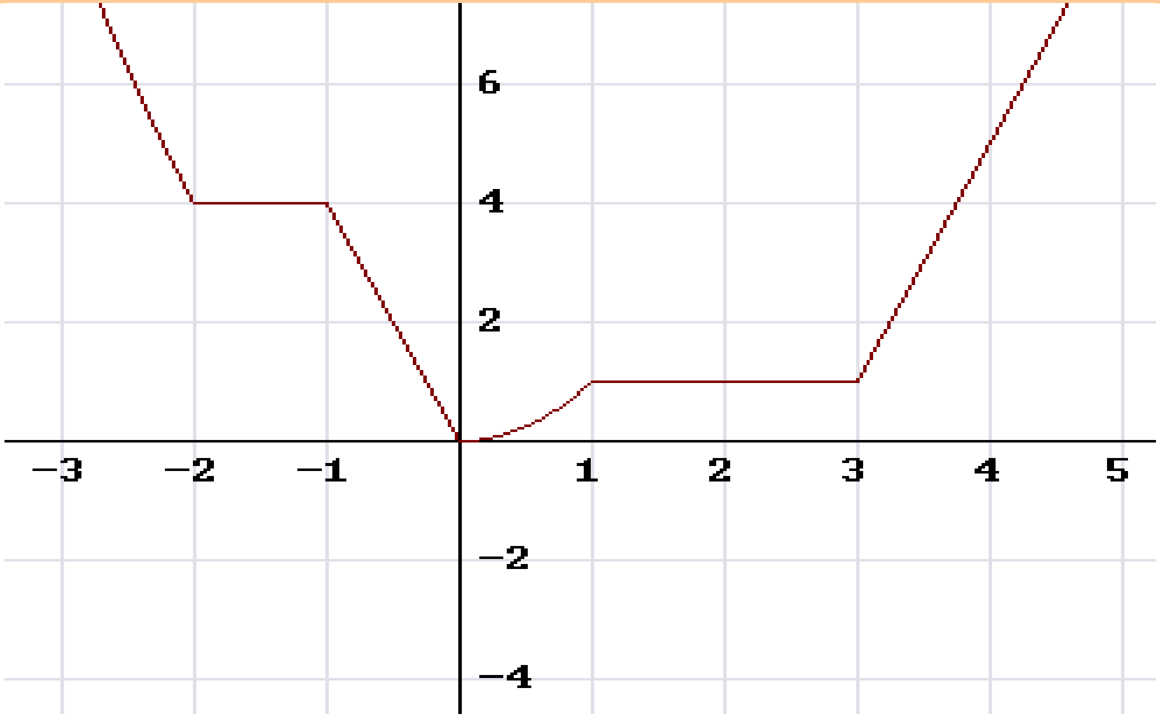
Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diremos que *f* es **estrictamente decreciente** en un intervalo (*a*,*b*) si para todos los pares de valores x_1, x_2 de dicho intervalo se verifica que $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.



3.2. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- ## 3.2. Crecimiento y decrecimiento.

Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diremos que *f* es **creciente** en un intervalo (*a*,*b*) si para todos los pares de valores x_1, x_2 de dicho intervalo se verifica que $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.
Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diremos que *f* es **decreciente** en un intervalo (*a*,*b*) si para todos los pares de valores x_1, x_2 de dicho intervalo se verifica que $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.



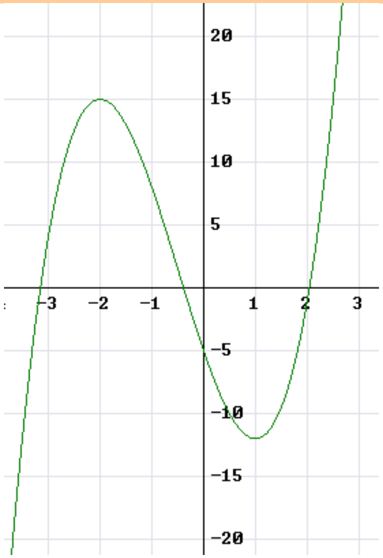
3.2. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

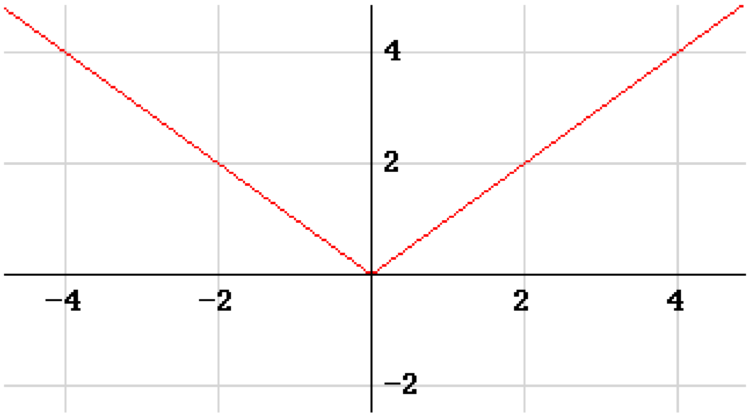
• 3.2.2. Máximos y mínimos (LOCALES)

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Diremos que una función *f* tiene un **máximo local o relativo** en x_0 si existe un entorno de centro x_0, $(x_0 - h, x_0 + h)$, tal que para todo punto *x* perteneciente a dicho entorno se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

Diremos que una función *f* tiene un **mínimo local o relativo** en x_0 si existe un entorno de centro x_0, $(x_0 - h, x_0 + h)$, tal que para todo punto *x* perteneciente a dicho entorno se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.



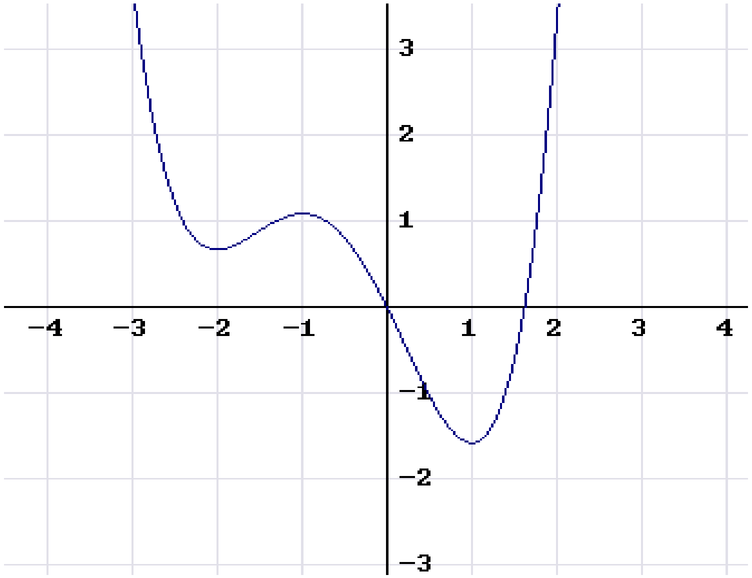


3.2. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

- ## 3.2.2. Máximos y mínimos (LOCALES)

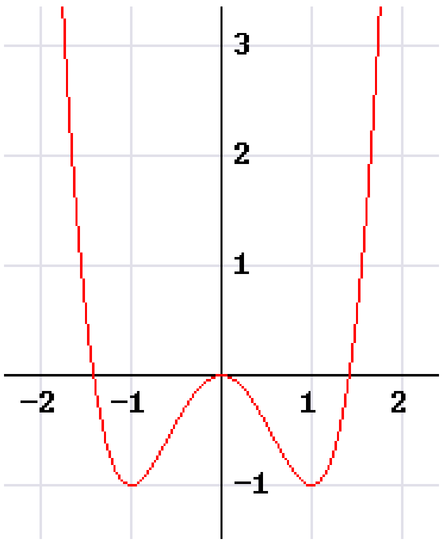
MÁXIMOS Y MÍNIMOS GLOBALES

Diremos que una función f tiene un **mínimo absoluto o global** en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f. Diremos que f tiene un **máximo absoluto o global** si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f.

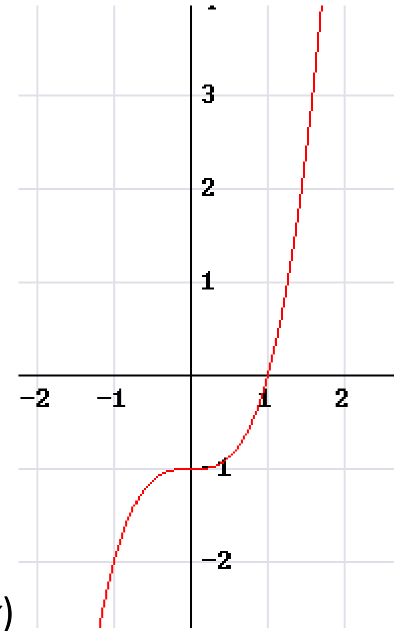


3.2. EJERCICIOS

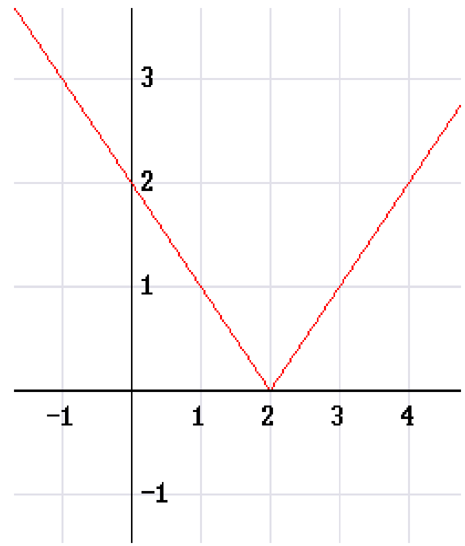
1. Las siguientes curvas son las gráficas de tres funciones *f*(*x*), *g*(*x*) y *h*(*x*):



f(*x*)



g(*x*)



h(*x*)

Determina en cada una de ellas los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos

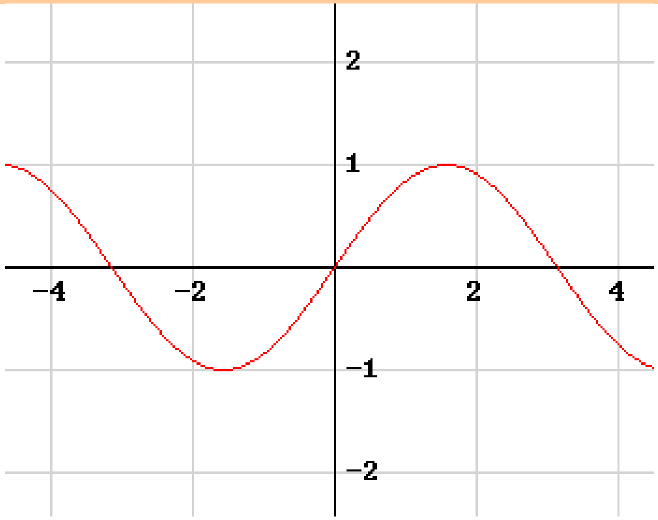
3.3. Funciones acotadas, periódicas y simétricas.

• 3.3.1. Funciones acotadas.

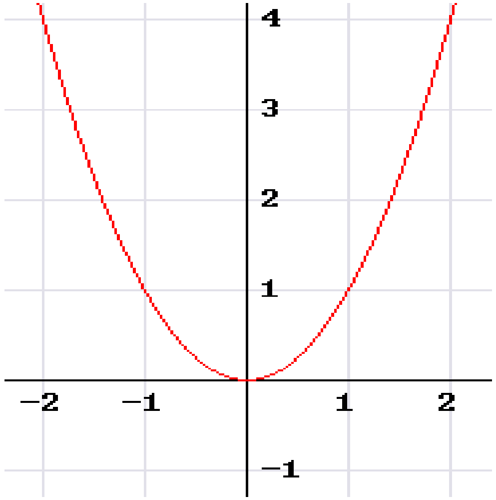
Diremos que una función *f* está **acotada superiormente** si existe un número *M* tal que el valor de la función en cualquier punto *x* del dominio cumple que $f(x) \leq M$. En este caso *M* es una cota superior.

Del mismo modo diremos que una función *f* está **acotada inferiormente** si existe un número *m* tal que el valor de la función en cualquier punto *x* del dominio cumple que $f(x) \geq m$. Entonces diremos que *m* es una cota inferior.

A)



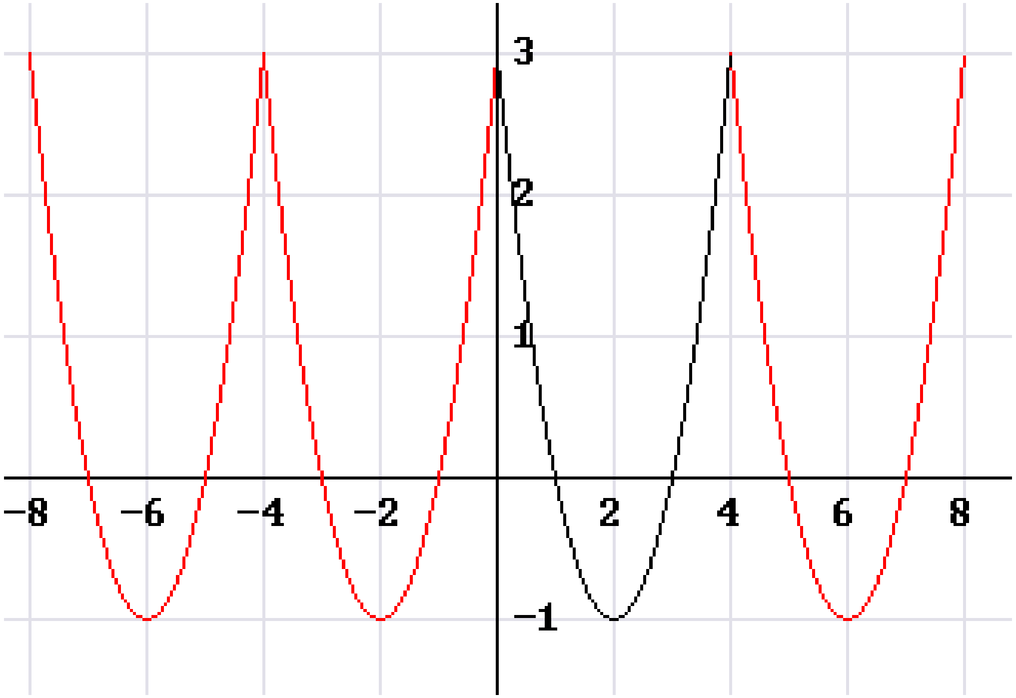
B)



3.3. Funciones acotadas, periódicas y simétricas.

- ## 3.3.2. Funciones periódicas

Diremos que una función *f* es **periódica** de periodo *T* si existe un número real positivo *T* tal que para cualquier punto *x* del dominio se verifica $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.



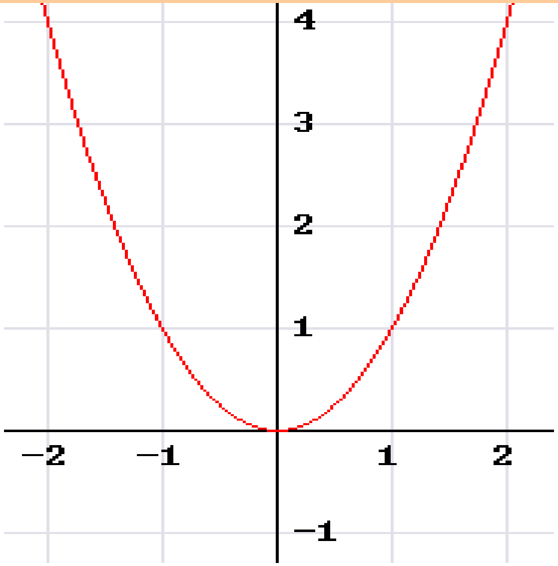
3.3. Funciones acotadas, periódicas y simétricas.

- ## 3.3.3. Funciones simétricas: pares e impares.

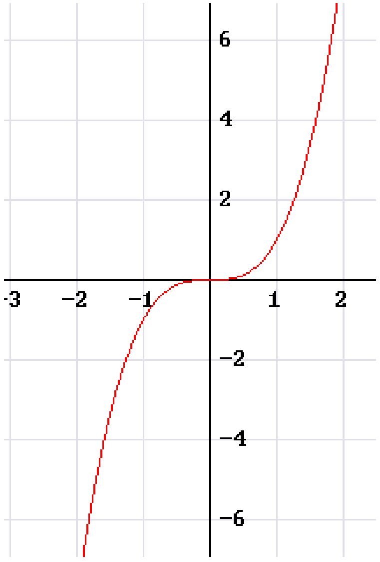
Diremos que una función f es **par** si para cualquier x de su dominio se verifica que $f(-x) = f(x)$. Las gráficas de las funciones pares son simétricas respecto del eje Y.

Diremos que una función f es **impar** si para cualquier x de su dominio se verifica que $f(-x) = -f(x)$. Las gráficas de las funciones impares son simétricas respecto del origen de coordenadas.

Función par

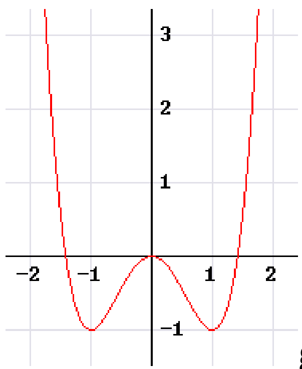


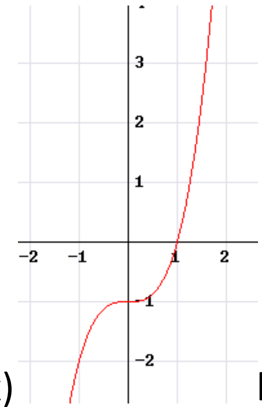
función impar

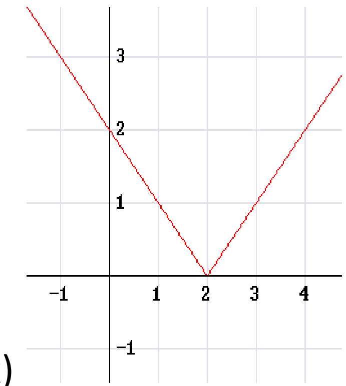


3.3. EJERCICIOS

1. Las siguientes curvas son las gráficas de tres funciones f(x), g(x) y h(x):

f(x)


g(x)


h(x)


Determina si están acotadas.

2. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares e indica el tipo de simetría:

a) $f(x) = x^6 - 3x^2$ b) $g(x) = x^5 - 3x^2$ c) $h(x) = 3x^2 - 2x$ d) $j(x) = 3x^3 + 2x$

3. Construye la gráfica de dos funciones periódicas, la primera de periodo 3 y la segunda de periodo 5.

3.4. Operaciones con funciones.

- ## 3.4.1. Suma y diferencia de funciones.

Dadas dos funciones reales de variable real f,g se define la función suma f+g como (f+g)(x)=f(x)+g(x). $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

Dadas dos funciones reales de variable real f,g se define la función suma f-g como (f-g)(x)=f(x)-g(x). $Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

EJEMPLO.

Dadas $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ y $g(x)=x^2-3$

calcula f+g y f-g así como sus dominios.

3.4. Operaciones con funciones.

3.4.2. Producto de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real f,g se define la función producto $(f \cdot g)$ como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ y $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

EJEMPLO: Dadas $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcula su producto y el dominio de la función producto

3.4.3. Cociente de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real f y g se define la función cociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

EJEMPLO: Dadas $f(x) = x-1$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$ calcula f/g y su dominio

3.4. Operaciones con funciones.

- ## 3.4.4. Composición de funciones.

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g se define la FUNCIÓN COMPUESTA de f y g y se escribe $g \circ f$ (se lee f compuesta con g) a la función: $g \circ f : R \to R$;

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

EJEMPLO:

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ g(x) = \dfrac{x+2}{3}$.

Calcula $f \circ g$, $g \circ f$, y determina el dominio de definición de ambas funciones

3.4. Operaciones con funciones.

3.4.5. Propiedades de la composición de funciones

a) LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES NO ES CONMUTATIVA.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

EJEMPLO: Comprobar que no se cumple la propiedad conmutativa con $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3.$

b) PROPIEDAD ASOCIATIVA.

Si consideramos tres funciones f,g,h se verifica que: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

EJEMPLO: Comprobar la propiedad asociativa con las siguientes funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = 1/x$ y $h(x) = x^2$

3.4. Operaciones con funciones.

• 3.4.6. Función inversa

Se define la **función identidad** $id: R \to R$ como la función real de variable real definida por $id(x) = x$. El dominio y recorrido de esta función es todo el conjunto de los números reales.

Consideremos dos funciones: $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

Calculemos $f \circ g$ y $g \circ f$ ¿qué se observa?

Sea f una función real de variable real, diremos que g es la **inversa** de f y se suele denotar por $g = f^{-1}$ si para cualquier $a \in Dom(f)$ se verifica que $f(a) = b, f^{-1}(b) = a$ y en consecuencia también se cumple que $f \circ g = g \circ f = id$.

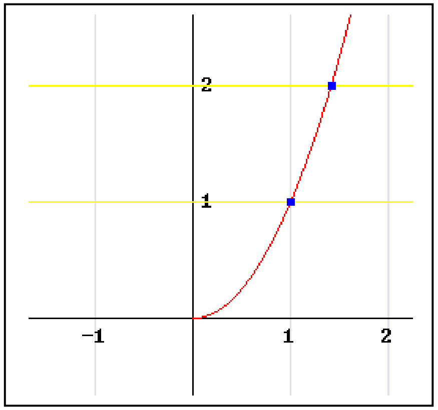
3.4. Operaciones con funciones.

- ## 3.4. Función inversa. Existencia.

NO TODAS LAS FUNCIONES TIENEN INVERSA.

Sea $f: R \to R$, f tiene INVERSA $\Leftrightarrow f$ es INYECTIVA.

Sea $f: R \to R$ diremos que f es INYECTIVA $\Leftrightarrow$ para cualesquiera $x, y \in Dom(f)$ si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ $\Leftrightarrow$ para cualesquiera $x, y \in Dom(f)$ si $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.



3.4. Operaciones con funciones.

• 3.4. Función inversa. Método de cálculo

Calculemos la inversa de la función $g(x) = \dfrac{3x-2}{5}$.

La función es una función lineal e inyectiva como puede observarse si analizamos su gráfica.

Para calcular la inversa seguiremos los siguientes pasos:

1) Intercambiamos las variables

2) Despejamos la variable y

3) Se obtiene la inversa

3.4. EJERCICIOS

1. Dadas las funciones:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x - 5$ b) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ d) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x+3$.

Calcula en cada caso las funciones $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$ así como sus dominios de definición.

2. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = \sqrt{x-3}$ y $h(x) = \dfrac{1}{2x}$, calcula: $f \circ g$, $g \circ h$, $f \circ h$, $f \circ f$ y $f \circ g \circ h$ y determina el dominio de cada una de ellas.

3. Sean las funciones: $f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ y $g(x) = \dfrac{1+5x}{2x}$.

Calcula: a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(2)$ c) $(f \circ g)(3)$ d) $(g \circ f)(3)$

4. Representa las siguientes funciones, determina si tienen inversa, y en caso afirmativo calcula su inversa y represéntala:

a) $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$ b) $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$

5. Dadas las funciones: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$, comprueba si $g = f^{-1}$, o si $h = f^{-1}$.