TEMA 2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. ELEMENTOS

Una función es una relación que se establece entre dos variables x e y que asocia a cada valor de la primera variable (**variable independiente**) un único valor de la segunda variable (**variable dependiente**). Esta relación se representa mediante la expresión *y=f(x)*.

Una **función real de variable real** es una relación en la que tanto los valores de la variable dependiente como los de la variable independiente son números reales. Se suele expresar mediante $f: D \subseteq R \to R$, $x \to y = f(x)$. A $f(x)$ se le denomina la imagen de x por la función f. La variable x recibe el nombre de **variable independiente** y la variable y recibe el nombre de **variable dependiente.**

Dada una función $f: R \to R$, se define el **dominio o campo de existencia** de la función f, como el subconjunto D de números reales x para los cuales existe una imagen. Se suele denotar por $Dom(f)$. En términos más formales:

$$Dom(f) = \{x \in R / existe \quad f(x)\}.$$

Dada una función $f: R \to R$, se define el **recorrido o imagen** de la función f como el subconjunto de números reales que resulta de calcular la imagen de todos los valores del dominio. Se suele denotar por $\mathrm{Im}(f)$ o $\mathrm{Re}\,c(f)$. En términos formales:

$$\mathrm{Re}\,c(f) = \{y \in R / existe\ x \in Dom(f)\ tal\ que\ y = f(x)\}.$$

Dada una función $f: R \to R$, se define la **gráfica** de la función f como el conjunto de pares (x_0, y_0) tales que $y_0 = f(x_0)$, siendo x_0 un valor del dominio de la función. Se suele denotar por $Gr(f)$. En términos formales:

$$Gr(f) = \{(x_0, y_0) \in R^2 / x_0 \in Dom(f),\ y_0 = f(x_0)\}.$$

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. ELEMENTOS

EJEMPLOS:

Dadas las siguientes funciones determina su dominio, su recorrido y su gráfica:

a) $f(x)=e^x$ b) $g(x)=\ln(x)$ c) $h(x)=\sqrt{x-1}$

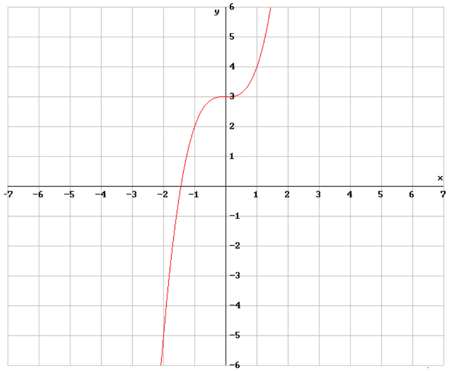
FORMAS DE DETERMINAR UNA FUNCIÓN:

Mediante su **expresión analítica** o fórmula que relaciona la variable dependiente y la variable independiente. Por ejemplo: $f(x)=x^3+3$

Mediante una **tabla de valores**, según los datos que pueden extraerse de una situación cotidiana. En la siguiente tabla se muestra la temperatura exterior de un inmueble a lo largo de las horas del día:

Hora	0	4	8	12	16	20	23
Temperatura ºC	20º	18º	16º	25º	32º	30º	25º

Mediante su **gráfica**. A partir de la representación gráfica de una función podemos analizar de manera visual el comportamiento de una función. La gráfica de la función $f(x)=x^3+3$ es



EJEMPLO. Determinar dominio y recorrido de las funciones definidas como tabla de valores y por la gráfica angerior.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

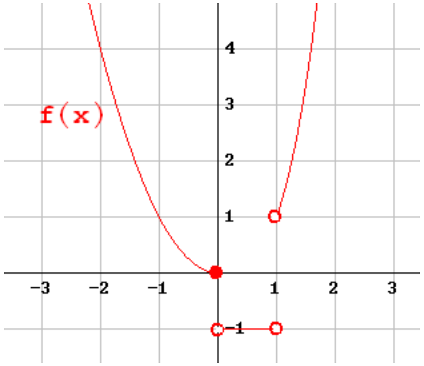
2.1.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. ELEMENTOS: EJERCICIOS

1) Determina el dominio y recorrido de las funciones:

a) $f(x)=\frac{3}{x+7}$ b) $g(x)=\sqrt{x+7}$ c) $h(x)=\ln(x-9)$

d) $i(x)=3^{-x}-1$ e) $j(x)=\begin{cases} e^{x} & si \quad x<0 \\ x^{2} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

2. Sea $f(x)$ una función cuya gráfica viene dada en la Figura adjunta. Calcula a partir de su gráfica su dominio y su recorrido.



3. Sea $f(x)$ la función definida por la tabla adjunta, determina su dominio y su recorrido.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y	3	2	1	3	7	8	9	1	2	4	1	2	7	9

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.2. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Sean las funciones $f:R\to R$ y $g:R\to R$. A partir de estas funciones podemos construir otras funciones utilizando las operaciones básicas:

Suma: Se define la función suma $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Se verifica que $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)$.

Diferencia: Se define la función diferencia $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$. Se verifica que $Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)$.

Producto: Se define la función producto $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$. Se verifica que $Dom(f\cdot g)=Dom(f)\cap Dom(g)$.

Cociente: Se define la función cociente $(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ para $g(x)\neq 0$. Se verifica que $Dom(f/g)=(Dom(f)\cap Dom(g))-\{x\in Dom(g)/g(x)=0\}$.

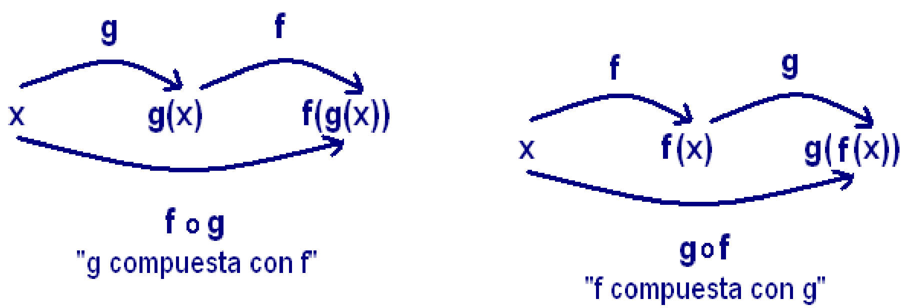
EJEMPLO: Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\sqrt{x}$ calcular f+g, f-g, f g y f/g así como sus dominios.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.2. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Dadas las funciones $f:R\to R$ y $g:R\to R$ se denomina **función compuesta** de g con f y se denota por $f\circ g:R\to R$ a la función definida por $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. La función $f\circ g$ se lee "g compuesta con f". La composición de funciones no es conmutativa, es decir, en general $f\circ g\neq g\circ f$.

Si $x_0\in Dom(f\circ g)$ entonces se verifica que $x_0\in Dom(g)$ y $g(x_0)\in Dom(f)$.



EJEMPLO: Dadas las funciones $f(x)=x+2$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ calcula "g compuesta con f" y "f compuesta con g"

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.2. OPERACIONES CON FUNCIONES: EJERCICIOS

1. Dadas las funciones $f(x)=3x^2-1$, $g(x)=\frac{1}{x-4}$ y $h(x)=\ln(x)$.
Determina la expresión analítica y el dominio de las siguientes funciones:

a) $f+g$ b) $g-h$ c) $f\circ g$
d) $g\circ f$ e) $f\cdot g$ f) $h\circ f$
g) f/g h) g/h i) $g\cdot h$

2. Dadas las funciones $f(x)=x^2-3x$, $g(x)=\sqrt{3x}$ y $h(x)=\sqrt[3]{x}$ determina la expresión analítica y el dominio de las siguientes funciones:

a) $f\circ g$ b) $g\circ h$ c) $f\circ h$
d) $g\cdot h$ e) h/f f) $f-(f\circ h)$