

4. LÓGICA MATEMÁTICA

En este primer bloque se estudian aspectos de las matemáticas infantiles que son comunes a todas las partes en que tradicionalmente suelen dividirse las matemáticas escolares. La clasificación y la seriación están estrechamente vinculadas con el aprendizaje del número, la medición y la geometría. Tanto la clasificación como la seriación se estudian dentro del marco más amplio de las relaciones (como resultado de establecer relaciones de equivalencia y de orden con los objetos).

4.1 Propiedades y relaciones de objetos y colecciones

4.1.1 La construcción de relaciones y la actividad matemática

Comenzaremos por dar una definición de relación que nos pueda servir de guía a lo largo del curso.

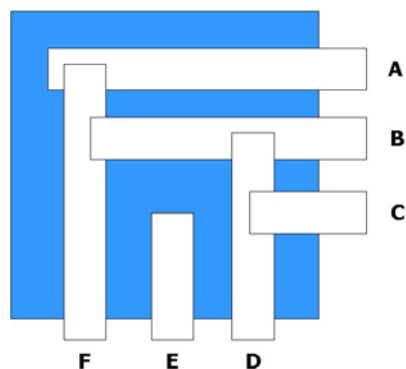
Qué es una relación

Las *relaciones* son conexiones que establecemos mentalmente entre dos o más objetos, personas o situaciones. Dado que, normalmente, podemos expresar las relaciones que establecemos mediante el lenguaje, también puede decirse que “relacionar dos cosas consiste en hablar de una refiriéndose a la otra”. Por ejemplo, podemos decir que “Juan es hermano de Pedro” o que “la mesa es 30 cm más alta que la silla”.

Sería posible sostener que algunas relaciones se dan, aunque no establezcamos ninguna “conexión mental”. Por ejemplo, la fracción $1/5$ es equivalente a $2/10$ aunque nunca nos hayamos detenido a pensarlo. Así, podemos decir que existe una relación de equivalencia entre ambas fracciones. También, si hay un libro encima de una mesa, podemos decir que “el libro está encima de la mesa”. Podría pensarse que las relaciones reflejan un “hecho”, antes que ser el resultado de una acción mental. Sin embargo, desde el punto de vista educativo, en el que nos planteamos cómo ayudar a los niños a hacer matemáticas, conviene más un enfoque psicológico. Con esto queremos señalar que al maestro y al educador les interesa saber, principalmente, cómo descubren los niños nuevas relaciones. Plantearemos pues, en este curso, la idea de relación como resultado de una acción mental poniendo especial atención al desarrollo que se produce en el pensamiento infantil a través de estas relaciones.

El lugar de las relaciones en la actividad matemática

Vamos a comenzar con el análisis de un problema que nos va a permitir descubrir el lugar central que ocupan las relaciones dentro de la actividad matemática. La situación es la siguiente: Tenemos un tablero (de color azul) en el que están pegadas distintas tablas. El problema que nos planteamos es qué procedimiento debemos seguir para coger la tabla A.



Entre las distintas tablas que hay pegadas al tablero podemos establecer una relación que llamaremos de “bloqueo”. Por ejemplo, la tabla C bloquea a la tabla D (en adelante, se dirá simplemente C bloquea a D). Es decir, no es posible coger la tabla D si antes no quitamos la C. Algunas de las relaciones las percibimos directamente al detectar un contacto físico entre las tablas. Entre las relaciones que percibimos directamente están: F bloquea a A, D bloquea a B, B bloquea a F, C bloquea a D. Hay otras relaciones de bloqueo que no pueden percibirse directamente (debido a la ausencia de contacto físico) y deben deducirse. Por ejemplo, si sabemos que para coger la tabla B hay que quitar antes la tabla D, y para quitar la tabla D, debemos quitar antes la C, podemos deducir que C bloquea a B. Esto es cierto aunque no percibamos ningún contacto físico entre ambas tablas. Podríamos decir que la relación entre ambas tablas (B y C) se establece, de forma indirecta, a través de la tabla D. Otras relaciones que no podemos percibir y debemos deducir de otras son: C bloquea a F, C bloquea a A, D bloquea a F, D bloquea a A, B bloquea a A. El mecanismo que me permite deducir una relación a partir de otras dos es lo que llamaremos en la siguiente sesión “propiedad transitiva de las relaciones” que es una propiedad que tienen muchas relaciones (como la de bloqueo). Podemos representar esta deducción del modo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} C \text{ bloquea a } D \\ D \text{ bloquea a } B \end{array} \right\} \Rightarrow C \text{ bloquea a } B$$

Supone ya un paso muy importante pasar de un tipo de relaciones que percibimos, a través de los sentidos, a otro tipo de relaciones que deducimos racionalmente. Todas estas relaciones deben articularse para llegar a solucionar el problema.

Todas estas relaciones, percibidas y deducidas, permiten que elaboremos un plan para resolver el problema. Llamaremos a este plan “estrategia de resolución”, que en este caso sería: Coger la tabla C, luego la D, la B, la F y, finalmente, la A.

El concepto de cálculo relacional

El procedimiento que hemos descubierto para resolver el problema es algo distinto a una relación. Es una regla para actuar, aprovechando la información que me suministran las relaciones descubiertas, con el objetivo de resolver el problema.

Parece entonces que, para resolver un problema de matemáticas, necesitaremos fundamentalmente descubrir nuevas relaciones e inventar procedimientos de resolución basados en el conocimiento de estas relaciones. Llamamos cálculo relacional a estas dos cosas: descubrir nuevas relaciones e inventar procedimientos de resolución.

Esto se hace en analogía con el cálculo con números. Cuando efectuamos un cálculo, por ejemplo $3 + 5 = 8$, obtenemos un número a partir de otros dos. Igual ocurre con las relaciones. Obtenemos una relación a partir de otras, mediante una deducción, u obtenemos un procedimiento como resultado del análisis de varias relaciones. De aquí viene el nombre de cálculo relacional. Podríamos resumir diciendo que para resolver un problema es necesario realizar distintos tipos de cálculos relacionales.

4.1.2 Las propiedades de los objetos y los descriptores

Una propiedad es una marca o característica que tiene un objeto que permite identificarlo y compararlo con otros a través del establecimiento de semejanzas o diferencias.

Ejemplo de propiedades son “tener color rojo”, “tener forma triangular” o “ser un objeto de cocina”. Palabras como “característica” o “atributo” suelen utilizarse también para designar a las propiedades.

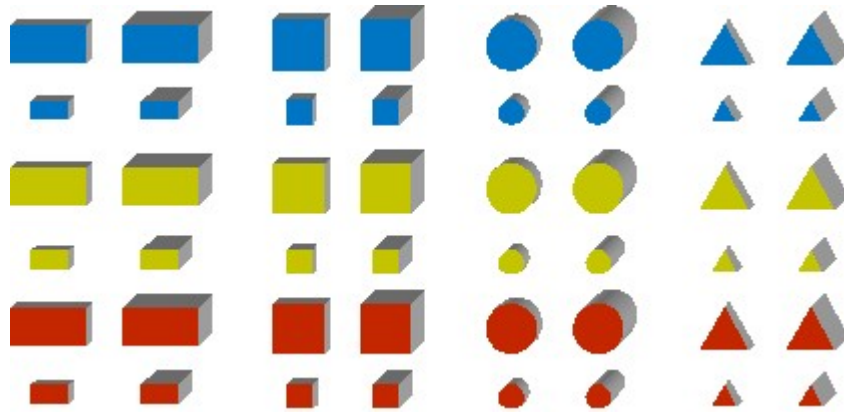
Un descriptor es un conjunto de propiedades relacionados entre sí. Por ejemplo, el *color* es un descriptor. Es el conjunto de las propiedades rojo, azul, amarillo, verde, etc.

Podemos decir también que los *descriptores* son las *variables* o “aspectos observables en los objetos que pueden tomar distintos valores” y las *propiedades* son cada uno de los distintos valores que puede tomar la *variable*.

4.1.3 Los bloques lógicos

Los bloques lógicos de Dienes son un material formado por 48 figuras geométricas de distinto color, forma, tamaño y grosor. En la imagen siguiente podemos ver todas estas

figuras. Cada uno de los bloques lógicos tiene cuatro propiedades correspondientes a cada uno de los descriptores citados. No hay dos bloques iguales.



Las propiedades de los objetos utilizadas en las actividades de clasificación son representadas mediante tarjetas de simbolización. Estas tarjetas suelen usarse siempre como material complementario a los bloques lógicos.

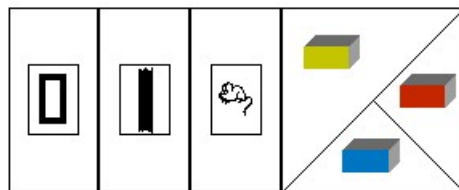


Actividades con los bloques lógicos: propiedades

Las primeras actividades que se suelen realizar con los bloques lógicos suelen tener el objetivo de que los niños se familiaricen con las propiedades de los bloques y que identifiquen las formas, los colores, etc. Se pueden hacer dos clases distintas de actividades. Pueden darnos las propiedades de los objetos, de modo que los niños tengan que localizar el objeto o objetos que cumplen dichas propiedades. También pueden darnos uno de los bloques lógicos de manera que los niños tengan que "describirlo" señalando las propiedades que tiene dicho bloque.

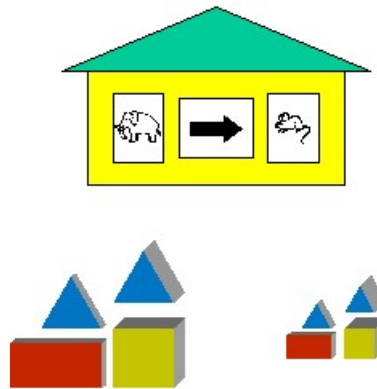
Ejemplos de estos tipos de actividades son:

a) El juego de quién es



b) Tabla de atributos

c) Juegos de transformación



4.1.4 Las propiedades de las relaciones

Del mismo modo que los objetos tienen propiedades, también las relaciones tienen propiedades. Igual que decimos que un objeto tiene la propiedad de ser rojo, una relación puede tener, por ejemplo, la propiedad de ser reflexiva. La diferencia que hay entre ambas situaciones es que, mientras que los objetos físicos son accesibles a través de los sentidos y las propiedades (color, forma, textura) también, en el caso de las relaciones no ocurre así. Dado que una relación es una conexión mental que establecemos entre dos objetos, las relaciones no tienen existencia material, no pueden ser percibidas directamente a través de los sentidos sino que son el resultado de la reflexión.

Así, vamos a ver que las propiedades de las relaciones tienen un carácter notablemente más

Reflexiva

Una relación es *reflexiva* si para cualquier elemento se cumple que dicho elemento está relacionado consigo mismo. Esto puede indicarse también diciendo que

Para cualquier $a \in A$, se cumple que $a R a$ (donde el signo \in se lee "pertenece" y la R "está relacionado con").

Simétrica

Una relación es simétrica si siempre que un elemento a está relacionado con un elemento b , se cumple que el elemento b está relacionado con a . Dicho de otro modo

Para cualquier $a, b \in A$, se cumple que $a R b \Rightarrow b R a$

Antisimétrica

La idea de una relación antisimétrica es que, al contrario de lo que ocurre en las relaciones simétricas, nunca se puede invertir el orden de los elementos que intervienen en la relación. Esto podría formularse diciendo que "una relación es antisimétrica si siempre que un elemento a está relacionado con un elemento b , se cumple que el elemento b NO está relacionado con a ". De otro modo, podría decirse que:

Para cualquier $a, b \in A$, se cumple que $a R b \Rightarrow b \not R a$

Transitiva

Una relación es transitiva si siempre que a está relacionado con b y b está relacionado con c , se cumple que a está relacionado con c .

Para todo $a, b, c \in A$, se cumple que $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$

La propiedad transitiva es fundamental por que permite relacionar dos objetos entre sí, indirectamente, a través de un tercero. Son transitivas las relaciones "tener el mismo color", "tener más edad que" o "haber nacido en el mismo país que".

4.1.5 Tipos de relaciones

Existen en matemáticas dos grandes clases de relaciones: las de equivalencia y las de orden. Dentro de las relaciones de orden hay cuatro clases distintas. Vamos a estudiar qué propiedades caracterizan cada tipo de relación poniendo ejemplos de cada una de ellas.

Relaciones de equivalencia

Son relaciones de equivalencia las que cumplen las propiedades:
Reflexiva, simétrica y transitiva.

Por ejemplo, la relación “nacer en la misma provincia que” es una relación de equivalencia.

Relaciones de orden

a) Son relaciones de orden estricto las que cumplen las propiedades:
Antireflexiva, antisimétrica y transitiva.

Por ejemplo, si consideramos el conjunto formado por los 5 primeros números naturales y la relación de “ser mayor que”

b) Son relaciones de orden NO estricto las que cumplen las propiedades:
Reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Como ejemplo de relación de orden amplio podemos poner los números racionales con la relación de “ser menor o igual que”.

4.1.6 Los esquemas y su importancia en el establecimiento de relaciones

Los conocimientos que almacenamos en la memoria no son unidades de información aisladas. Todos nuestros conocimientos están organizados en esquemas que están conectados entre sí.

Podemos decir que los *esquemas* son entidades conceptuales complejas que están compuestas por unidades más simples. Podríamos también definir los esquemas, en un lenguaje más afín al que utilizamos en este curso, como “conjuntos de conocimientos que están relacionados entre sí”. En este sentido, todos tenemos una idea, una “imagen mental” de qué es, por ejemplo, un perro. Si vemos por la calle un perro que ha perdido una pata y va cojeando por tener sólo tres, nos llama la atención (y posiblemente nos apena), por que se activan en nosotros distintos esquemas (como el esquema de “perro” que incluye tener cuatro patas o el esquema de “enfermedad”).

Los esquemas se forman a partir de la experiencia personal en situaciones que se repiten.

Esquemas visuales

Los esquemas visuales también reciben el nombre de “marcos”. Pueden definirse como “una agrupación de características que configuran un objeto o una imagen”. Haciendo la analogía de un esquema visual con una fotografía, podemos decir que un esquema visual es una especie de “fotografía mental”, una imagen que tenemos almacenada como si estuviera dentro del marco de un cuadro o de una foto (de ahí el nombre de “marcos”).

Esquemas situacionales

Son paquetes de información referidos a situaciones convencionales que se dan en la vida habitualmente. Los esquemas situacionales suelen incluir personajes, objetos, acciones que están asociados en nuestra experiencia. Si la idea de esquema visual era la de una “fotografía mental”, la de esquema situacional es como una “historia”, un “relato”, algo que se cuenta, como una película con personajes, objetos, escenas, situaciones, acción. Por esta razón los esquemas situacionales reciben el nombre de “guiones”, pues se asemejan al guión de una película.

Esquemas sociales

Los esquemas sociales son paquetes de información referidos a conocimientos de distintos aspectos de la vida en sociedad como las relaciones interpersonales (esquemas de “amistad”, “amor”, “ser padre”, “ser enemigo”), los oficios (“ser carpintero”, “cocinero”) o esquemas genéricos sobre las personas (como ser “deportista”, “hijo único”, “madre

superprotectora”, etc.). En la siguiente actividad del Miniarco algunas de las relaciones se establecen en base a esquemas sociales, por ejemplo, el esquema que tenemos de “jardinero” y otros esquemas relacionados con el –como el esquema situacional de “regar”– nos permite relacionar al jardinero regando, de la parte de arriba de la actividad, con el grupo de flores que aparecen en la parte de abajo. Esto lo hacemos por que dentro de nuestro esquema del oficio de jardinero entra “regar las flores” y no entra “regar las setas”. Igualmente ocurre con el esquema social de “carpintero” o de “panadero” o el de “pintor”. También intervienen en esta actividad esquemas visuales como el de “semáforo” o situacionales como el de “llover”.

Relaciones basadas en esquemas visuales, situacionales y sociales

Tenemos actividades que se resuelven estableciendo relaciones basadas en esquemas visuales, situacionales o sociales. Actividades como la siguiente en la que los esquemas de “jugar al fútbol” o de “ir a esquiar” o “ir de excursión a la montaña”, nos permiten relacionar cada personaje con el tipo de calzado que debe llevar.



Estas actividades no parecen “matemáticas”. Quizá por que su objetivo no sea la adquisición de conceptos o procedimientos de un alto grado de abstracción (más separados de los objetos y actividades de la vida cotidiana). Sin embargo, debemos comprender que sí hay un cierto carácter lógico (o matemático) en estas actividades en el sentido de que obligan a razonar, a encontrar relaciones, a justificarlas, a coordinar distintas relaciones entre sí, a comparar de forma sistemática imágenes o a observar detalladamente las características físicas de un objeto o una imagen.

4.2 Clasificaciones

Clasificar es juntar por semejanzas y separar por diferencias. También podemos decir que clasificar es formar clases o conjuntos.

Noción de conjunto

Un conjunto es una colección de objetos que tienen una (o varias) propiedad(-es) común(-es). Esta propiedad recibe el nombre de “propiedad característica del conjunto”. La noción de conjunto corresponde a la idea intuitiva de encontrarnos con un montón de cosas que están juntas por alguna razón. Si nos encontramos con objetos que están juntos pero que no tienen nada (ninguna propiedad) en común, diremos que hay una colección de objetos pero no un conjunto.

Relación de pertenencia

Decimos que un objeto pertenece a un conjunto (o que es un elemento del conjunto) cuando cumple la propiedad característica del conjunto.

Podemos decir, por ejemplo, que el triángulo azul, grande y delgado (de los bloques lógicos) pertenece al conjunto de los triángulos.

La relación de pertenencia tiene una característica peculiar que la hace distinta de las demás relaciones que hemos visto. Relaciona un objeto con un conjunto de objetos. Hasta ahora las

relaciones establecían vínculos entre dos objetos. Por ejemplo, el triángulo azul, grande y delgado estaba relacionado con el círculo azul, pequeño y grueso por la relación “tener el mismo color”, que es una relación de equivalencia. Como veremos más adelante, las relaciones en las que aparecen conjuntos van a ser más complejas que aquellas en las que se relacionan dos objetos, dado que algunas veces suponen la consideración de todos los elementos del conjunto.

4.2.1 Formas elementales de clasificación

La dicotomía

La forma más sencilla de clasificación es la dicotomía. Hacer una dicotomía es dividir un conjunto en dos partes.

La división

La división consiste en formar más de dos subconjuntos de un conjunto dado de forma que la unión de estos subconjuntos sea el total. Intuitivamente, estamos hablando de dividir un conjunto en más de dos partes.

La doble dicotomía

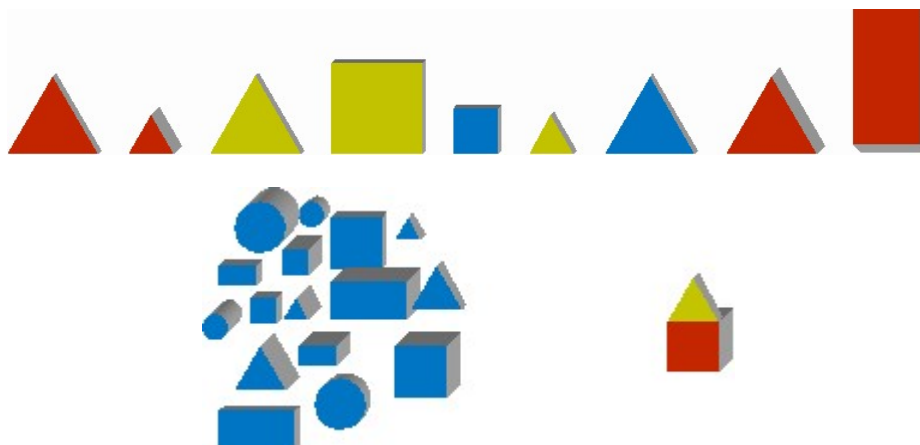
Consiste en aplicar dos dicotomías sucesivamente. Primero clasificamos atendiendo a una variable y luego a otra.

Las clasificaciones multiplicativas

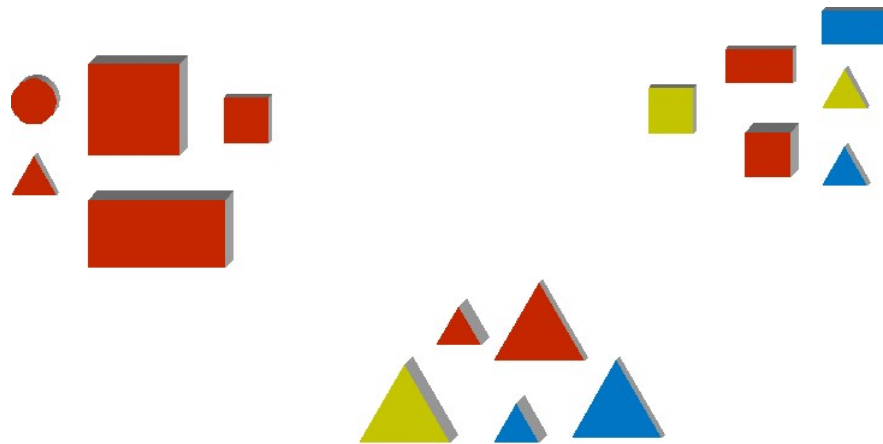
Consiste en clasificar atendiendo a dos variables. Si una de ellas toma tres valores y otra cuatro, obtendremos en total doce clases producto.

4.2.2 Evolución en el aprendizaje de las clasificaciones

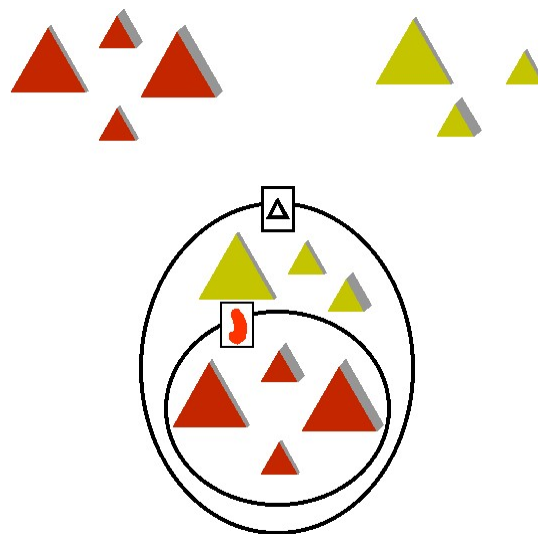
Primer estadio: colecciones figurales



Segundo estadio: colecciones no figurales



Tercer estadio: clasificación operatoria



4.3 Seriaciones

4.3.1 Conceptos básicos relacionados con las seriaciones

Alineación

Concepto de serie

Una serie es una alineación ordenada con principio y fin.

Tipos de variables

Sabemos que una variable es una característica que puede tomar varios valores. Como ya advertimos en las primeras sesiones del curso, utilizamos indistintamente las palabras “variable” y “descriptor”. Ejemplos de variables o descriptores son el color, que puede tomar los valores rojo, azul, verde, etc., o la longitud, que puede tomar los valores dos palmos, tres centímetros, etc.

1. Una variable es cuantitativa si, dados dos objetos, podemos decir sí los valores que toma la variable para esos objetos son iguales o distintos y, además, podemos comparar los objetos por el grado de posesión de esa cualidad y, gracias a esto, ordenarlos. A las variables cuantitativas las llamamos también ordenables, Ejemplo de variables ordenables son la longitud, la temperatura, el volumen, etc.

2. Una variable es cualitativa si, dados dos objetos, podemos decir si los valores que toma la variable para esos objetos son iguales o distintos pero no podemos ordenar los objetos por el grado de posesión de dicha cualidad..

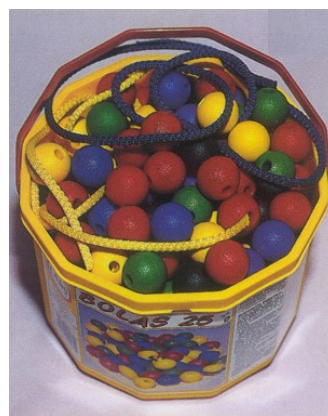
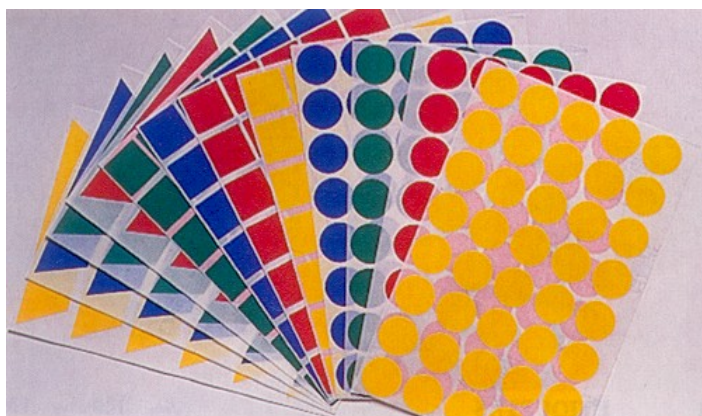
4.3.2 Series cualitativas

Llamamos serie cualitativa a una sucesión de objetos ordenados atendiendo a una cualidad que cambia alternativamente, dando lugar a series repetitivas.

Materiales didácticos

A continuación pasamos a exponer qué materiales resultan adecuados para la realización de series cualitativas. En primer lugar, tenemos las cuentas para ensartar con las que podemos hacer collares en los que formamos seriaciones. En este caso el material tiene un solo descriptor que es el color.

Los gomets son otro material muy típico en las aulas de con el que se hacen series cualitativas. Normalmente se suele pegar, al principio de una hoja de papel, dos gomets y la actividad consiste en copiar el patrón para formar la serie.



Otros muchos juegos de objetos para ensartar sirven para hacer este tipo de series. En la siguiente imagen se presenta uno de estos materiales que tiene la particularidad de añadir el descriptor forma. Podemos ver el tipo de actividad propuesto en la tarjeta, que se reduce a la reproducción de un orden en el que no hay repetición de ningún patrón.

4.3.3 Las series cuantitativas

Una serie cuantitativa es una sucesión de objetos (o colecciones de objetos) ordenados atendiendo a una variable cuantitativa, de forma creciente o decreciente. También decimos de las series cuantitativas que son aquellas en las que ordenamos objetos (o colecciones de objetos) por tamaños (o por el número de objetos) de forma creciente o decreciente. Sería un error decir solamente que una serie cuantitativa es aquella que hacemos atendiendo al tamaño de los objetos, pues una serie en la que seguimos la pauta grande, pequeño, grande, pequeño... es una serie hecha atendiendo al tamaño, pero no es lo que consideramos una serie cuantitativa, pues no hay un orden creciente ni decreciente.

Cantidades continuas y discretas

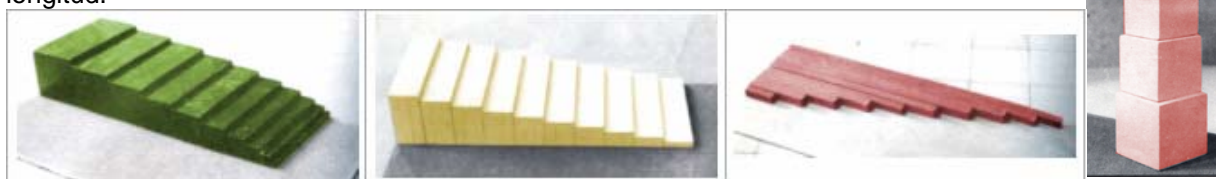
Las cantidades pueden ser discretas o continuas. Cantidades discretas son las que constan de unidades o partes separadas unas de otras, como tres lápices, cuatro mesas, dos niños, etc. Las cantidades discretas pueden ser contadas y reciben por ello el nombre de contables. Las cantidades continuas, por el contrario, no están formadas por partes separadas entre sí. "Continuo" significa "sin interrupción". Las cantidades continuas, como el agua, la harina, el serrín, etc no son contables; son medibles si seleccionamos una unidad de medida y vemos cuántas veces contiene dicha cantidad la unidad de medida elegida. Por ejemplo, dos litros de agua, tres vasos de vino.

La razón de distinguir entre estos dos tipos de series cuantitativas radica en el hecho de que hacer una serie cuantitativa requiere comparar magnitudes y las técnicas utilizadas para comparar magnitudes continuas y discretas son distintas.

Materiales didácticos

Entre los materiales que se utilizan para el aprendizaje de la ordenación por tamaños figuran los materiales de Montessori. La Torre rosa de Montessori es un material en el que el único descriptor es el volumen, puesto que todas las demás características permanecen fijas (el color y la forma). Sirve para aprender a ordenar por tamaños. Como vemos, una característica fundamental en el diseño de los materiales de Montessori es que todos las variables (o descriptores) permanecen invariables y que el material sirve para aprender a ordenar con respecto al descriptor que sí varía (en este caso, el volumen), que siempre toma 10 valores distintos.

Las escaleras de Montessori (verde, amarilla y roja –que también suele llamarse “delgada”), sirven para ordenar atendiendo respectivamente al grosor, a la altura del escalón y a la longitud.



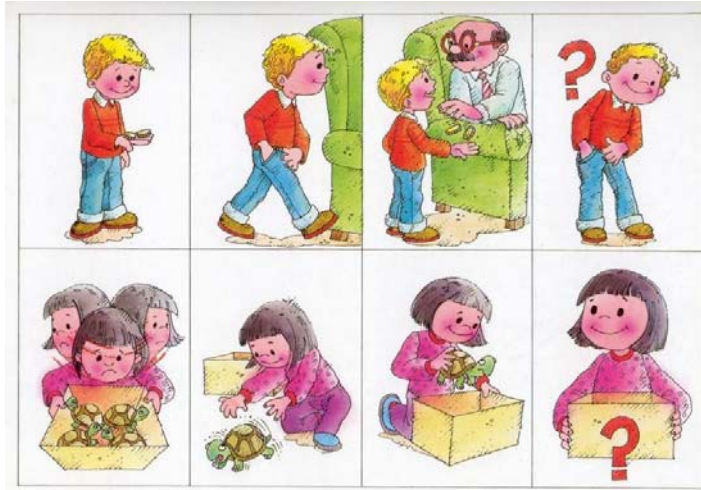
Hay toda una serie de materiales que tienen características similares a los que hemos estudiado antes. Lo distintivo de estos materiales es que suelen tener menos de 10 tamaños distintos, son encajables –de modo que resultan autocorrectivos– y suelen tener colores variados para resultar más vistosos. El color no interviene para nada en las actividades de ordenación por tamaños y, por esta razón, no variaba en los materiales de Montessori (a fin de no distraer la atención del niño hacia aspectos irrelevantes de la actividad).



4.3.4 Series temporales

Acompañar las actividades de seriación temporal con un complemento de descripción verbal hace que podamos realizar este tipo de actividades en dos sentidos. Podemos, como hemos dicho antes, pedir que se ordenen las viñetas y que se justifique posteriormente la ordenación, pero también es posible describir verbalmente una situación y pedir al niño que "dibuje" la situación en varias viñetas. Esta actividad es típica como complemento a la lectura de un cuento, y los dibujos realizados a continuación por el niño pueden orientarnos para evaluar su comprensión oral. De hecho, las seriaciones temporales aparecen en el currículo, dentro del área de comunicación y representación, como actividad de aproximación al lenguaje escrito.

En la siguiente imagen, vemos dos ejemplos de series temporales:



Las series temporales están basadas en esquemas.