

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A , B y C . Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B , de 24 toneladas y los de tipo C , de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, se pide:

- (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
- (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.
- (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

- (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
- (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.
- (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

- (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A . Calcule $P(A \cup B)$.
- (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C | A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.
- (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A} | D) = 0.2$ y $P(D | A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema
$$\begin{cases} (a+1)x + 4y & = 0 \\ (a-1)y + z & = 3 \\ 4x + 2ay + z & = 3 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a .
- b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.
- c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}, \text{ se pide:}$

- a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en \mathbb{R} .
- b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1}$.
- c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1, 1, 1)$, se pide:

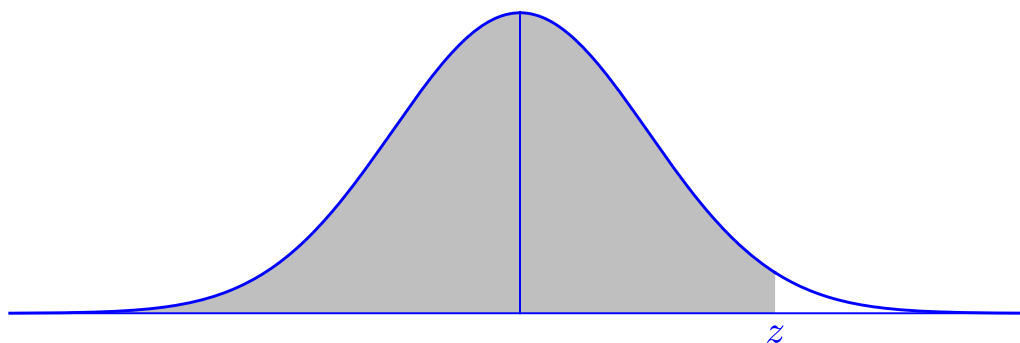
- a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
- b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .
- c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

- a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?
- b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.
- c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 0.75 puntos. Cálculo correcto de las toneladas de tierra transportadas por cada tipo de camión: 0.25 puntos (en total). En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

a) Solución correcta: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Derivación correcta: 0.5 puntos. Extremos relativos: 0.5 puntos. Extremos absolutos: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Comprobación del triángulo: 0.25 puntos. Ecuación del plano: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Aplicación de la regla de Bayes: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.

B.1.

- a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Discusión correcta del sistema: 0.75 puntos (0.25 puntos por cada uno de los tres casos).
- b) Planteamiento correcto: 0.25 puntos. Resolución correcta del sistema: 0.25 puntos.
- c) Por cada incógnita bien calculada: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente y interpreta los resultados obtenidos. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

- a) Continuidad en el punto $x = -1$: 0.5 puntos. No continuidad en el punto $x = 1$: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- c) Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

- a) Posición relativa: 0.25 puntos. Hallar el punto: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento correcto: 0.5 puntos. Solución correcta: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento correcto: 0.5 puntos. Hallar el punto medio: 0.25 puntos. Hallar el punto simétrico: 0.25 puntos

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus diferentes formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

Sea $x = n^\circ$ de camiones tipo A , $y = n^\circ$ de camiones tipo B , $z = n^\circ$ de camiones tipo C . Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 = y + z \\ \frac{10}{100} \cdot 24y = \frac{1}{7} \cdot 28z \\ 14x + 24y + 28z = 302 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ 3y - 5z = 0 \\ 7x + 12y + 14z = 151 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 7, y = 5, z = 3$$

Luego los 7 camiones de tipo A transportan 98 toneladas de tierra, los 5 camiones tipo B transportan 120 toneladas de tierra y los 3 camiones de tipo C transportan 84 toneladas de tierra.

A.2.

a) Como $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2 - 1)^2} = f(x)$, f es par.

b) Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-1}} = +\infty$, f no es derivable en $x = 1$. (También se puede razonar, por ejemplo, que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty$).

c) $f'(x) = \frac{4}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. Por tanto, la función f es creciente en los intervalos $(1, \infty)$ y $(-1, 0)$, y decreciente en $(0, 1)$ y $(-\infty, -1)$. Por tanto, en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ la función f alcanza un mínimo relativo y en $x = 0$ un máximo relativo. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ la función no puede tener un máximo absoluto y como $f(x) \geq 0$ y $f(1) = f(-1) = 0$, entonces $x = 1$ y $x = -1$ serán puntos de mínimos absolutos.

A.3.

a) Consideremos los vectores $v_1 = B - A = (-1, 4, -4)$, $v_2 = C - A = (1, 3, -3)$. Se tiene que v_1 y v_2 son linealmente independientes pues, por ejemplo, el menor formado por sus dos primeras componentes es no nulo. De este modo, los puntos A, B, C forman un triángulo y están, por tanto, contenidos en un único plano. Una ecuación de este plano es $\pi : -y - z + 1 = 0$.

b) La recta pedida tiene por punto base A y vector director v_1 , luego está dada por

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Al cortar con el plano $z = 1$ se obtiene $\lambda = 1/2$. En consecuencia, el punto pedido es $(1/2, 0, 1)$.

c) Calculamos el vector $v_3 = C - B = (2, -1, 1)$. Así, el perímetro buscado es

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \approx 12.55.$$

A.4.

a) Usando que A y B son independientes se tiene

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.3 + 0.5 - (0.3 \cdot 0.5) = 0.65.$$

b) Como $P(C | A) = P(A \cap C) / P(A) = 0.5$, se tiene que $P(A \cap C) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$. En consecuencia

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0.3 - 0.15 = 0.15.$$

c) Como $P(\bar{A} | D) = 0.2$, tenemos que $P(A | D) = 1 - P(\bar{A} | D) = 0.8$. Por tanto,

$$P(A | D) = \frac{P(D | A)P(A)}{P(D)} \Rightarrow P(D) = \frac{P(D | A)P(A)}{P(A | D)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.8} = 0.1875.$$

B.1.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y A' la matriz ampliada, $|A| = -(a^2 + 2a - 15) = 0 \Leftrightarrow a = -5$ y $a = 3$.

Si $a \neq 3$ y $a \neq -5 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 3 = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible determinado.

Si $a = 3$ o $a = -5 \Rightarrow \text{rango}A = \text{rango}A' = 2 < n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow Sistema compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$, resulta $\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \lambda, y = -\lambda, z = 3 + 2\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

c) Para $a = 5$, como $|A| = -20, |A_x| = 0, |A_y| = 0, |A_z| = 3|A| = -60 \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 3$.

B.2.

a) El dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$, por lo que si $x \neq \pm 1$, la función es continua por estar formada por funciones elementales. Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = -1$. En $x = 1$ f no está definida y por tanto no es continua.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2} \right)^{2x^2-1} = [1^{-\infty}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{2+x^2} - 1 \right)^{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2+x^2}{-2} \cdot \frac{-4x^2+2}{2+x^2}} \right) = e^{-4}.$$

$$\text{c) } \int_{-1}^0 \frac{2x^2}{3-3x} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3-3x} \right) dx = \left(\frac{-x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} \ln|1-x| \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3} \ln 2.$$

B.3.

a) Unas ecuaciones de r son $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$. Al cortar con $\pi : x - z = 2$ se obtiene $(1, 0, -1)$, así que r y π se cortan en ese punto.

b) La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es la intersección de π con la recta ortogonal a π por A . Como el vector normal a π es $(1, 0, -1)$, dicha recta es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$. Por tanto la proyección es el punto $A'(2, 1, 0)$.

c) La proyección ortogonal O de A sobre r , es el corte de r con el plano normal a r que pasa por A . Dicho plano tiene por vector normal al vector director de r , $(2, 1, -2)$. Por tanto, el plano tiene ecuación $2x + y - 2z = 1$.

Al cortarlo con $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$ obtenemos $O(1/3, -1/3, -1/3)$. Puesto que el punto simétrico A'' verifica

$$\text{que } \vec{OA} = -\vec{OA''}, \text{ tenemos que } A'' = A + 2\vec{AO} = (1, 1, 1) + 2 \left(\frac{1}{3} - 1, -\frac{1}{3} - 1, -\frac{1}{3} - 1 \right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3} \right).$$

B.4.

a) Si X es la variable "longitud de la sardina en mm", nos piden $P(X > 160)$ que calculamos tipificando a la normal Z de media 0 y desviación típica 1:

$$P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160 - 175}{25.75}\right) = P(Z > -0.58) \approx 0.7190.$$

Así, aproximadamente un 72% de la captura serán de la calidad exigida.

b) Hemos de buscar $t < 175$ mm tal que $P(t < X < 175) = 0.18$, es decir $P\left(\frac{t-175}{25.75} < Z < 0\right) = 0.18$. De la tabla de la normal vemos que $\frac{t-175}{25.75} \approx -0.47$ de donde $t \approx 163$ mm.

c) La variable T = "número de sardinas de longitud menor que 15 cm en cada caja de 10" sigue una distribución binomial $B(n = 10, p)$ con

$$p = P(X < 150) = P(Z < (150 - 175)/25.75) \approx P(Z < -0.97) \approx 0.1660.$$

La probabilidad pedida es $P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) = 1 - (1 - p)^{10} = 0.8372$.