| | | |
|---|---|---|
| Universidad Autónoma de Madrid | **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>Convocatoria **2024**<br><br>**MATERIA: MATEMÁTICAS II** | **ESPECÍFICA** |

## INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**INSTRUCCIONES:** Escoja entre una de las dos opciones A o B. Lea con atención y detenimiento los enunciados de las cuestiones y responda de manera razonada a los puntos concretos que se preguntan en la opción elegida.

**DURACIÓN:** 90 minutos.
**CALIFICACIÓN:** Se indica en cada apartado.

---

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando los resultados:

a. (1 punto) Determinar si A y B tienen matriz inversa y, es su caso, calcularla.
b. (1 punto) Resolver la ecuación AX-B=I, siendo I la matriz identidad.
c. (0,5 puntos) Resolver la ecuación 2A-3BX=2I, siendo I la matriz identidad.

**Ejercicio 2.** Sea la función real de variable real $f(x) = \frac{(x-1)^2}{3x(x-3)}$

Se pide, justificando los resultados:

a. (1,5 puntos) Calcular las asíntotas de la función f(x)
b. (1 punto) Estudiar si la función es creciente o decreciente alrededor de x=2

**Ejercicio 3.** Dadas las rectas r y s siguientes:

$$r \begin{cases} 4x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x - 3y - 2z = 3 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$$

Se pide, justificando los resultados:

a. (1,25 puntos) Estudiar la posición relativa de las rectas.
b. (1,25 puntos) Calcular la distancia entre las dos rectas.

**Ejercicio 4.** En una naviera el tiempo medio para la entrega de un buque tiene una distribución normal con una media de 50 meses y desviación típica de 6 meses. Se elige al azar un pedido de la fabricación de un buque a esta naviera.

Se pide, justificando los resultados:

a. (0,75 puntos) calcular la probabilidad de que ese buque sea fabricado en menos de 60 meses
b. (0,75 puntos) ¿cuál sería la probabilidad de que fuera fabricado en más de 44 meses?
c. (1 punto) ¿qué porcentaje de pedidos de buques en esta naviera se hacen para ser entregados entre los 3 y 5 años?

| | | |
|---|---|---|
| Universidad Autónoma de Madrid | **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>Convocatoria **2024**<br><br>**MATERIA: MATEMÁTICAS II** | **ESPECÍFICA** |

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1.** Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - ay + 4z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 2az = -2 \end{cases}$$

Se pide, justificando los resultados:

a. (1,5 puntos) Determinar los valores del parámetro a para los que el sistema tiene solución.
b. (1 punto) Resolver para a=2

**Ejercicio 2.** Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = x^3 + 2x^2$ y $g(x) = -x^3 - x^2 + 1$, se pide, justificando los resultados:

a. (1,25 puntos) Calcular los puntos de corte de ambas curvas entre sí
b. (1,25 puntos) Calcular el área comprendida entre ambas funciones entre los valores $x = -1$ $y$ $x = 1$

**Ejercicio 3.** Dada la recta r y el plano ∏ siguientes:

$$r \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \Pi: x + y + az = 3$$

Se pide, justificando los resultados:

a. (1,25 puntos) Calcular el valor del parámetro a que hace que el plano sea paralelo a la recta r.
b. (1,25 puntos) Hallar un plano que contenga al punto (5 4 7) y sea perpendicular a la recta r.

**Ejercicio 4.** En el panel de control de cámaras de video de un centro comercial hay tres zonas claramente separadas. En cada zona hay una serie de pulsadores de diferente color, aunque en todas hay uno de color verde. En la zona 1 hay un total de 4 pulsadores, en la zona 2 hay 6 y en la zona 3 hay 7. Se elige una zona al azar y se activa un pulsador también al azar.

Se pide, justificando las respuestas:

a. (1,25 puntos) Determinar la probabilidad de que el pulsador activado sea verde.
b. (1.25 puntos) Sabiendo que el pulsador activado es verde, determinar la probabilidad de que fuera el de la zona 1.

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1.**

a. Planteamiento de la solución con presentación del determinante: 0,25 puntos. Resolución del determinante: 0,25 puntos por cada uno. Discusión correcta del resultado: 0,25 puntos.
b. Planteamiento: 0,5 puntos. Solución correcta: 0,5 puntos.
c. Planteamiento: 0,25 puntos. Solución razonada: 0,25 puntos.

**Ejercicio 2.**

a. Planteamiento 0,25 puntos y resolución 0,25 puntos por cada tipo de asíntota.
b. Planteamiento 0,25 puntos. Obtención de puntos críticos: 0,25 puntos máximo y mínimo. Determinación de los intervalos 0,25. Resolución 0,25 puntos

**Ejercicio 3.**

a. Planteamiento: 0,25 puntos. Obtención de los tres vectores: 0,25 puntos cada uno. Resolución correcta 0,25 puntos.
b. Planteamiento: 0,5 puntos. Resultado correcto: 0,75 puntos.

**Ejercicio 4.**

a. Planteamiento: 0,25 puntos. Resolución correcta: 0,5 puntos.
b. Planteamiento: 0,25 puntos. Resolución correcta: 0,5 puntos.
c. Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución correcta: 0,5 puntos.

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1.**

a. Planteamiento 0,25. Matriz de coeficientes: 0,5 puntos. Obtención de los valores singulares: 0,5 puntos. Discusión: 0,25 puntos
b. Planteamiento de la solución: 0,25 puntos. Por cada variable correcta 0,25 puntos.

**Ejercicio 2.**

a. Planteamiento: 0,25 puntos. Cálculo correcto del valor de x para cada punto de corte: 0,25 puntos. Obtención de los puntos en forma (x, y) 0,25 puntos
b. Planteamiento de las dos integrales: 0,5 puntos. Resolución de la integral definida: 0,75 puntos.

**Ejercicio 3.**

a. Planteamiento 0,25 puntos. Obtención de cada vector director: 0,25 puntos. Obtención del valor de a 0,5 puntos
b. Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución: 0,75 puntos.

**Ejercicio 4.**

a. Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución: 0,75 puntos.
b. Planteamiento: 0,5 puntos. Resolución: 0,75 puntos.

| | | |
|---|---|---|
| UAM Universidad Autónoma de Madrid | **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>Convocatoria **2024**<br><br>**MATERIA: MATEMÁTICAS II** | **ESPECÍFICA** |

# SOLUCIONES OPCIÓN A

**Ejercicio 1.**

a. Por definición $A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}$

Por lo tanto, para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero:

$|A|$= -2 → A sí tiene inversa
$|B|$= 0 → B no tiene inversa

Matriz inversa: **$A^{-1}$ =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b. Resolver AX-B=I

Para despejar la X, multiplicar por A-1 por la izquierda: $A^{-1}AX-A^{-1}B=A^{-1}I$ y despejando $X=A^{-1}(I+B)$

**X =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \frac{-9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c. Para despejar la X hay que multiplicar por $B^{-1}$ y, como B no tiene inversa, **la ecuación no se puede resolver**.

**Ejercicio 2.**

a. **Asíntotas verticales**: valores que anulan el denominador: **X=0 y X=3**

Asíntotas horizontales:

Límite por la izquierda: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ Por lo tanto **asíntota horizontal: x=1/2**

Asíntotas oblicuas: la pendiente es m = $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\,x = \infty$ Por lo tanto **no tiene asíntotas oblicuas**

b. Para hacer el estudio de intervalos crecientes o decrecientes, se obtienen los puntos críticos, que son x=0 y X=3 y, tras el estudio de la derivada, x=-3 es un mínimo y x=1 un máximo.

Piden alrededor de 2, por lo que sólo hace falta calcularlo en el intervalo (1,3): f'(2)= -25/56 <0 → decreciente

| (-∞,-3) | (-3,0) | (0,1) | **(1,3)** | (3,∞) |
|---|---|---|---|---|
| | | | ↓ | |

**Ejercicio 3.**

a. Recta r: $v_r$ (1, 3, 1) y punto P (0, -1, 0) Recta s: $v_s$ (5, -3, 7) y punto Q (3, 0, 0), PQ (3, 1, 0)

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$ **Las rectas se cruzan**

b. Distancia entre dos rectas: $dist = \frac{|v_r,\ v_s,\ PQ|}{|v_r\ x\ v_s|} = \mathbf{2,328\ u}$

**Ejercicio 4.** X es la variable aleatoria que indica "tiempo de entrega de un buque". La distribución de X se puede aproximar por N(50,6), con $\mu$ = 50 y $\sigma$=6

**a.** P(X < 60) = P(Z < $\frac{60-50}{6}$) = P(Z<1,67) = **0.9525**

b. P(X > 44) = P(Z > $\frac{44-50}{6}$) = P(Z> -1) = P(Z< -1) = **0,8413**

c. P(36 < X < 60)= P($\frac{36-50}{6}$ < Z < $\frac{60-50}{6}$) = P(-2,33 < Z < 1,67) = P(Z<-1,67) – P(Z<-2,33) = 0,9525 – (1-0,9901)= **0,9426**

## SOLUCIONES OPCIÓN B

**Ejercicio 1.**

a. Estudio del rango de la matriz de coeficientes, A, y de la matriz ampliada, A*.
El sistema tendrá solución si Rango(A) = Rango (A*).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -a & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2a & -2 \end{pmatrix}$$

Para que el rango de A sea igual a 3, se debe cumplir que su determinante sea distinto de cero:

$|A|$ = $a^2 + a - 2$ Por lo tanto, $|A| \neq 0$ si $a \neq 1$ $y$ $a \neq -2$, valores para los que existe solución única

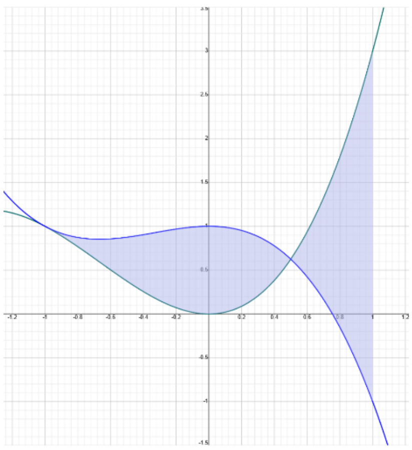
Si a=1 o a=-2 Rango (A) = 2 y Rango (A*) = 3 → sistema incompatible, no existe solución

b. Si a= 2, resolviendo **x=3; y=1/2 y z=-5/4**

**Ejercicio 2.**

a. Para determinar los puntos de corte se igualan ambas funciones y se despeja la variable:

f(x) = g(x) -> $2x^3+3x^2-1=0$ Las raíces están en -1 (doble) y en ½,
Por lo tanto, los puntos de corte son **(-1, 1) y (1/2, 5/8)**



b. Dado que dentro del intervalo hay un punto de corte, significa que ahí cambia la posición relativa entre las curvas, por lo que el área se calculará como

Área = $\left|\int_{-1}^{1/2}(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{1/2}^{1}(f(x)-g(x))dx\right|$ = **27/16 u²**

.

**Ejercicio 3.**

a. Para determinar a se necesitan los vectores que definen el plano y la recta:

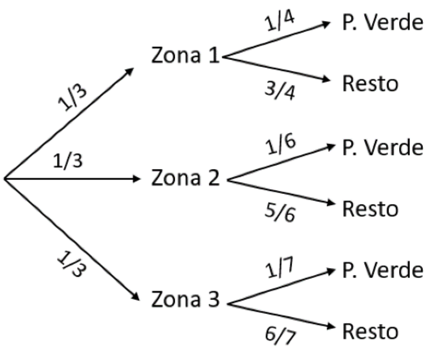
Plano: $\vec{n} = (1, 1, a)$ Para que el plano sea paralelo a la recta ambos vectores deben ser ortogonales,
Recta: $\vec{r} = (-3, 8, 7)$ es decir, su producto escalar debe ser 0:

(1, 1, a)(-3, 8, 7) = -3 + 8 -7a Igualando a 0 → **a=-5/7**

b. El plano pedido tiene como vector normal el vector director de la recta, (-3, 8, 7) y como debe pasar por el punto (5, 4, 7), el plano pedido es:

-3(x-5) + 8(y-4) + 7(z-7)=0 → **-3x +8y +7z = 66**

**Ejercicio 4.**




a. Probabilidad de que sea verde:

P(Verde)=$\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{1}{7} = \frac{47}{252} = 0{,}186$ → **Probabilidad del 18,6%**

b. Por Bayes P(Z1/Verde) = $\frac{P(Z1)P(Verde/Z1)}{P(Verde)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{4}}{\frac{47}{252}} = \frac{252}{467}$ = 0,545

**La probabilidad es del 54,5%**

| | |
|---|---|
| | **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>Convocatoria **2024**<br><br>**MATERIA: MATEMÁTICAS II**<br>**Programa de contenidos mínimos y criterios de evaluación** |

Según dicta la Comisión Organizadora de las pruebas de acceso a la Universidad para mayores de veinticinco a cuarenta y cinco años en el BOCAM núm. 142, pg 78 del 16 de junio de 2017, el currículo de los ejercicios será el establecido para las materias de segundo curso de Bachillerato, conforme a lo determinado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato o normativa que le sustituya (extraído del Boletín Oficial del Estado, número 3, sábado 3 de enero de 2015, sección I, página 419)

## PROGRAMA DE CONTENIDO

### Números y álgebra: Matrices y Determinantes

- Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
- Clasificación de matrices. Operaciones.
- Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
- Determinantes. Propiedades elementales.
- Rango de una matriz.
- Matriz inversa.
- Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.

### Análisis. Límites, funciones continuas, derivadas e integrales

- Límite de una función en un punto y en el infinito.
- Formas de representación. Crecimiento y decrecimiento.
- Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.
- Continuidad de una función.
- Tipos de discontinuidad.
- Teorema de Bolzano.
- Función derivada. Teoremas de Rolle del valor medio. La regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites.
- Aplicaciones de la derivada: problemas de optimización.
- Primitiva de una función. La integral indefinida. Técnicas elementales para cálculo de primitivas.
- La integral definida. Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

### Geometría. Vectores, rectas y planos, posiciones relativas, métricas

- Vectores en el espacio tridimensional.
- Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.
- Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.

- Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad en rectas y planos).
- Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

**Estadística y Probabilidad**

- Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.
- Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.
- Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.
- Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.
- Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.
- Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.
- Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.

## CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos.
- Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.
- Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.
- Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.
- Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización.
- Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.
- Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables y, en general, a la resolución de problemas.
- Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.
- Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.

- Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.
- Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real.
- Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.
- Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones