# INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS AUTORREGRESIVOS CON HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL (ARCH)

**Rafael de Arce**[1]
**I.L.Klein, diciembre de 1998**

[1] Este documento de trabajo se realiza de cara facilitar la comprensión del Programa de Doctorado en Modelización Económica del Instituto LR Klein, no pretendiendo ser más que una breve guía. 

## 1.Introducción

En muchas ocasiones en economía se habla de sucesos condicionados o de generación de expectativas a partir de los movimientos relativos que se produjeron en el pasado. Por ejemplo, todo el mundo relaciona inmediatamente la estabilidad o la inestabilidad en los mercados financieros con su comportamiento inmediatamente anterior, produciéndose fuertes hondas en la evolución de sus variables que, después de un gran sobresalto que dura más o menos días, tienden a retomar una senda de evolución tranquila. A cualquiera se le ocurre entonces que, en variables como éstas, el comportamiento en el momento actual responde a una expectativa generada sobre el valor de cambio producido en el momento precedente; es decir, a un valor esperado condicionado por la varianza del período anterior.

En la teoría clásica de series temporales (metodología de Box-Jenkins), el desarrollo estadístico se realiza a partir de un proceso estocástico estacionario; es decir (en sentido amplio o débil) de un proceso con:

- Media constante.
- Varianza constante.
- correlación entre dos observaciones distintas igual a la de otras dos cualquiera separadas por la misma distancia (mismo número de períodos).

En torno a la confirmación de la ausencia de tendencia (determinista o aleatoria), hay un nutrido conjunto de teorías y desarrollos matemáticos centrados en la diferenciabilidad de la serie temporal y en la existencia o no de raíces unitarias a partir de los conocidos test de Dickey y Fuller, de Mackinon o de Phillips y Perron, por citar algunos. Sin embargo, el estudio de la componente de varianza constante es un fenómeno menos extendido y, no tener en cuenta una posible no constancia de este componente, puede suponer diversos problemas estadísticos cuando se estiman modelos econométricos (problemas ligados con la eficiencia de los parámetros estimados y su fuerte volatilidad ante el amplio intervalo de confianza en el que se mueven).

Determinar un patrón de comportamiento estadístico para la varianza es el cometido de los modelos Autorregresivos condicionales heterocedásticos: ARCH. Engle (1982)[i] es el autor de una primera aproximación a la varianza condicional del tipo que describiremos más adelante. Después de estos hay una amplia familia de sofisticaciones del modelo inicial que darán nombre a los modelos GARCH, IGARCH, EARCH, TARCH, SWARCH, QS-ARCH, APARCH, FACTOR-ARCH, ...

En el artículo seminal de los modelos ARCH, Engle cita tres situaciones que motivan y justifican la modelización de la heterocedasticidad condicional Autorregresiva (nombre por él mismo dado). Estas serían las siguientes:

1. La experiencia empírica nos lleva a contrastar períodos de amplia varianza de error seguidos de otros de varianza más pequeña. Es decir, el valor de la dispersión del error respecto a su media cambia en el pasado, por lo que es lógico pensar que un modelo que atienda en la predicción a los valores de dicha varianza en el pasado servirá para realizar estimaciones más precisas.

2. En segundo lugar, Engle expone la validez de estos modelos para determinar los criterios de mantenimiento o venta de activos financieros. Los agentes económicos deciden esta cuestión en función de la información proveniente del pasado respecto al valor medio de su rentabilidad y la volatilidad que ésta ha tenido. Con los modelos ARCH se tendrían en cuenta estos dos condicionantes.

3. El modelo de regresión ARCH puede ser una aproximación a un sistema más complejo en el que no hubiera factores innovacionales con heterocedasticidad condicional. Los modelos estructurales admiten, en multitud de ocasiones, una especificación tipo ARCH infinito que determina con parámetros cambiantes, lo que hace a este tipo de modelos capaces de contrastar la hipótesis de permanencia estructural que supone una de las hipótesis de partida y condición necesaria para la validez del modelo econométrico tradicional..

En definitiva, la clave de estos modelos está en considerar la información pasada de la variable y su volatilidad observada como factor altamente explicativo de su comportamiento presente y, por extensión lógica, de su futuro predecible. Estadísticamente, esta conclusión se refleja en tener en cuenta la esperanza condicional (conocida y fija la información hasta el momento inmediatamente anterior) del cuadrado de una variable (la expresión de su varianza si su media es nula).

## 2. Conceptos básicos para el desarrollo de los modelos ARCH

Se define un proceso estocástico estacionario como aquella sucesión ordenada de variables aleatorias cuya función de distribución es invariante ante valores igualmente separados:

$$Y_t^{\infty} \mid F(y_{t-\infty}, y_{t-1-\infty}, ..., y_t, y_{t+1}, ...y_{t+\infty}) = F(y_{t+m-\infty}, y_{t+m-1-\infty}, ..., y_{t+m}, y_{t+m+1}, ...y_{t+m+\infty})$$

Como en la práctica es casi imposible conocer la verdadera función de distribución de muchas funciones. Esta definición (que se conoce con el nombre de "estacionariedad en sentido fuerte") se suele confirmar sólo para el primer y los segundos órdenes; es decir, para la media y la varianza del proceso. Según esta definición de "estacionariedad en sentido amplio o débil", un proceso estocástico sería estacionario cuando se cumplieran las tres condiciones siguientes:

1. $E(Y_t) = \mu$, ó media constante,
2. $Var(Y_t)=E(Y_t- \mu)^2=\sigma^2$, o varianza constante, y
3. $Cov(Y_t; Y_{t-j}) = Cov(Y_{t+m}; Y_{t+m-j})$

Como es conocido, el "ruido blanco" es un caso particular de este tipo de proceso en el que las tres condiciones se reescribirían del siguiente modo:

1. $E(\varepsilon_t) = 0$
2. $Var(\varepsilon_t)=E(\varepsilon_t- 0)^2=\sigma^2_\varepsilon$
3. $Cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-j}) = 0$

Sobre esta definición clásica de estacionariedad, conviene hacer algunas puntualizaciones estadísticas relativas a las segundas derivadas del proceso que estamos manejando.

**El hecho de que no exista autocorrelación entre observaciones del ruido blanco desplazadas en el tiempo, no significa necesariamente que no haya dependencia entre estas de un modo no lineal**. Lo único que aseguramos es precisamente eso: no podemos formular ningún tipo de dependencia lineal entre $\varepsilon_t$ y $\varepsilon_{t-j}$; pero nada se dice al respecto de si puede haber una relación de dependencia cuadrática, exponencial o de cualquier otro tipo.

La lógica de la dependencia entre el ritmo de evolución en períodos precedentes y el valor de variación del período actual nos lleva necesariamente a hablar de probabilidades condicionadas en términos de estadística teórica o inferencial. Es a partir de los momentos de primer y segundo orden en términos marginales (no condicionales) o condicionales como se pueden descubrir relaciones de causalidad entre series temporales que responden como un proceso estocástico estacionario para el contraste lineal.

**Puede existir un proceso definido a partir de un "ruido blanco", en el que la media y la varianza marginales sean constantes; y, al mismo tiempo, la media condicional puede ser constante y la varianza condicional no fija.**

En el siguiente proceso:

$$y_t = e_t (w + a y_{t-1}^2)^{1/2}$$

- donde $\varepsilon_t$ es un proceso de "ruido blanco" (entre otras, no hay correlación con su pasado, luego tampoco la hay con el pasado de $y_t$).
- El proceso generado $y_t$ es también estacionario
- En los momentos condicionales, en "t", el valor de "t-1" es una realización concreta conocida (no aleatoria)

Podemos calcular los valores de su esperanza y su varianza, no olvidando que, en los valores condicionales, los valores de la endógena en t-1 son realizaciones ya conocidas del proceso aleatorio, por lo que su valor esperando es el valor ya observado (no son variable aleaoria):

| | ***Marginal (incondicional)*** | ***Condicional*** |
|---|---|---|
| ***Esperanza*** | $E(y_t) = E(e_t^2 (w + a y_{t-1}^2))^{1/2} =$ <br> $= E(e_t)E((w + a y_{t-1}^2)^{1/2} = 0$ | $E_{t-1}(y_t) = (w + a y_{t-1}^2)^{1/2} E_{t-1}(e_t) = 0$ |
| ***Varianza*** | $E(y_t^2) = E(e_t^2 (w + a y_{t-1}^2)) =$ <br> $= s_e^2 (w + aE(y_{t-1}^2));$ <br> $E(y_t^2) = \frac{w}{1-a} s_e^2$ | $E_{t-1}(y_t^2) = (w + a y_{t-1}^2) E_{t-1}(e_t^2) =$ <br> $= (w + a y_{t-1}^2) s_e^2$ |

Es interesante resaltar que:

- la media (la esperanza) es contante en ambos casos, e igual a cero.
- La varianza marginal es constante; mientras que
- la varianza condicional depende de los valores que haya tomado $y^2_{t-1;}$ luego no es fija.

Se da la circunstancia de que, en este proceso, la función de autocovarianza es nula para todos los retardos que se quieran considerar; mientras que es distinta de cero para los valores al cuadrado del mismo proceso $y_t$ generado.

La autocovarianza de $y_t$ para el retardo $\tau$ se podría calcular como:

$$g(t) = E(y_t y_{t-t}) = E(e_t (w + a y_{t-1}^2)^{1/2} y_{t-t}) = E(e_t) E(w + a y_{t-1}^2)^{1/2} y_{t-t}) = 0$$

dado que el proceso lo hemos definido como estacionario y el residuo como "ruido blanco"; es decir, con correlación nula con periodos precedentes, lo que implica también correlación nula con los valores de $y_t$ desplazados en el tiempo.

La función de autocovarianza para la serie al cuadrado presenta valores distintos de cero, por lo menos para el retardo uno, como se puede comprobar con:

$$\operatorname{cov}(y_t^2 y_{t-1}^2) = E((y_t^2 - E(y_t^2))E(y_{t-1}^2 - E(y_{t-1}^2)) = E(e_t^2)E\left( (w + ay_{t-1}^2) - \frac{w}{1-a})(y_{t-1}^2 - \frac{w}{1-a} \right) =$$

$$= \left( wE(y_{t-1}^2) + aE(y_{t-1}^4) - \frac{w^2}{(1-a)^2} \right) s_e^2$$

De esta expresión, el único valor no calculado hasta el momento es el siguiente:

$$E(y_{t-1}^4) = E(e_t^4 (w + ay_{t-1}^2)^2) = \left( \frac{w^2}{(1-a)^2} \frac{3(1-a)^2}{1-3a^2} \right) (s_e^2)^2$$

Para este último cálculo se suponen dos cuestiones:

1. El ruido blanco se distribuye como una normal, por lo que podemos determinar el cuadrado de la varianza.
2. Además, $y_t$ es un proceso estocástico estacionario; es decir, el parámetro $\alpha$ es menor que la unidad y, con ello, nos aseguramos de que $3\alpha<1$, y la expresión anterior es siempre calculable.

Sin pérdida de generalidad, todo el proceso se puede realizar con la hipótesis de que la perturbación aleatoria tiene desviación típica igual a uno.

Aplicando este resultado a la ecuación anterior y simplificando, podemos calcular la autocovarianza de orden uno del proceso $y_t$ al cuadrado como:

$$g_2(1) = \frac{2w^2}{(1-a)^2(1-3a^2)} \neq 0$$

Con lo cual, el proceso $y_t$ descrito, si bien no tiene autocorrelación en forma lineal, sí la tiene su forma cuadrática (el resultado de este último cálculo es siempre distinto de cero, luego hay correlación).

La clave de los modelos que vamos a estudiar está en la distinción entre los momentos condicionales y marginales. Entre ellos existe una relación que se conoce con el nombre de ley de expectativas iteradas que, según Ruíz (1994)[ii], podría definirse como: "**la esperanza de la observación $y_t$, o de una función de ella, $g(y_t)$, condicional en información disponible en el momento t-$\tau$ puede calcularse tomando primero la esperanza condicional en información disponible en t-1, después calculando la esperanza condicional en t-2 y, así, sucesivamente hasta t-$\tau$**", es decir:

$$E_{t-t}(g(y_t)) = E_{t-t}(E_{t-t+1}(.....E_{t-1}(g(y_t)))$$

Para calcular la esperanza marginal, se puede dejar que $\tau$ tienda a infinito.

## 3. Especificación de un modelo ARCH(q)

Los modelos ARCH tienen su origen en un artículo de ENGLE (1982), en el que se pretendía obtener una predicción adecuada para la inflación en el Reino Unido, sujeta a fuerte volatilidad y con períodos de especial calma o de especial agitación.

El proceso ARCH(q) viene definido por la siguiente expresión:

$$y_t = e_t s_t$$
$$s_t^2 = w + \sum_{i=1}^{q} a_i y_{t-i}^2$$

Donde se dan las siguientes restricciones:

1. $\varepsilon_t$ es un proceso idénticamente distribuido con media cero y desviación típica igual a uno.
2. Los parámetros $\omega>0$ y $\alpha_i \geq 0$ e i=1...q, y, para cumplirse la condición de estacionariedad en media, la suma de todos los parámetros es menor que la unidad.
3. Si $\varepsilon_t$ es gaussiano y se distribuye según una normal, $y_t$ es condicionalmente normal y su varianza es $\sigma^2_t$.

El proceso utilizado en la sección anterior como ejemplo era, por tanto, un ARCH(1). Para éste, ya se demostró que:

- Las esperanzas marginal y condicional son iguales a cero.
- La varianza marginal es constante; mientras que
- la varianza condicional depende de los valores que haya tomado $y^2_{t-1;}$ luego no es fija.
- La distribución marginal del proceso ARCH(1) tiene una forma desconocida.

Las demostraciones realizadas para q=1 son generalizables para cualquier valor de "q"

De cara a la predicción con modelos ARCH, habrá que calcular los intervalos de predicción correctamente, ya que la predicción puntual no vendrá afectada por este tipo de estructura. Con este fin, podemos obtener el error cuadrático medio de predicción para cualquier momento, por ejemplo t+2, con el siguiente procedimiento:

$$ECM(\hat{y}_{T+2}) = E_T(\hat{y}_{T+2} - y_{T+2})^2 = E_T(y_{T+2})^2 = E_T(E_{T+1}(y_{T+2}^2) =$$
$$= w + a_2 y_T + ... + a_q y_{T+1-q} + a_1 E_T(y_{T+1}^2) =$$
$$= w(1+a_1) + (a_1^2 + a_2)y_T^2 + (a_1 a_2 + a_3)y_{T-1}^2 + ... + a_1 a_q y_{T+2-q}^2 + a_q y_{T+1-q}^2$$

## 4. Especificación de un modelo GARCH(p,q)

GARCH es la abreviatura de *Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity* y da nombre a la ampliación del modelo ARCH ya comentado que realizó Bollerslev (1986)[iii] para los órdenes p,q, y Taylor (1986)[iv], para el caso específico de los órdenes 1,1.

El modelo ARCH (q) que antes se presentaba, puede mostrar ciertas dificultades de estimación cuando se aplica a estructuras dinámicas en los cuadrados de las series. Por ejemplo, en las series financieras, el número de retardos a utilizar es muy elevado y ello llevaría a un engorroso número de iteraciones para alcanzar una solución al sistema planteado, pudiendo darse el caso de no encontrar nunca una solución. Por ello, el mismo ENGLE propuso ya en 1983 ciertas restricciones a los parámetros del ARCH(1) que simplificaban su estimación; pero estas no eran capaces de recoger cualquier caso, por lo que la aportación de Bollerslev es decisiva a la hora de poder dotar de utilidad al modelo presentado por ENGLE.

El modelo GARCH (p,q) se podría escribir como:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-j}^2$$

Con lo cual, el modelo ARCH(q) anterior no sería más que un caso concreto de este (aquél en el que todos los parámetros $\beta_i$ son igual a cero).

El modelo GARCH (1,1) tiene las siguientes características:

1. $\varepsilon_t$ es un idénticamente distribuido con media cero y desviación típica igual a uno.
2. Los parámetros $\omega>0$ y $\alpha_i$, $\beta_i \geq 0$ e i=1...q, y j=1...p. Además, para cumplirse la condición de estacionariedad en media, la suma de todos los parámetros es menor que la unidad.
3. La función de distribución marginal no es conocida, pero se pueden calcular los primeros momentos y definir el proceso respeto a su media y a su varianza.

Para el proceso GARCH (1,1), dichos momentos serán:

| | ***Marginal (incondicional)*** | ***Condicional*** |
|---|---|---|
| ***Esperanza*** | $E(y_t) = (\varepsilon_t^2(\omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2))^{1/2} =$ $= E(\varepsilon_t)E((\omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2)^{1/2} = 0$ | $E_{t-1}(y_t) =$ $= (\omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2)^{1/2} E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0$ |
| ***Varianza*** | $E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ | $E_{t-1}(y_t^2) = \sigma_t^2$ |

- donde $\varepsilon_t$ es un proceso de "ruido blanco" (entre otras, no hay correlación con su pasado, luego tampoco la hay con el pasado de $y_t$).
- El proceso generado $y_t$ es también estacionario
- En los momentos condicionales, en "t", el valor de "t-1" es una realización concreta conocida (no aleatoria)

De cara a la predicción, Engle y Bollerslev derivaron la siguiente fórmula para el cálculo de la varianza condicional en información disponible en el período T:

$$E_T(\sigma_{T+s}^2) = \frac{\omega}{(1-\alpha-\beta) + (\alpha+\beta)^{s-1}\left(\hat{\sigma}_{T+4}^2 - \omega/(1-\alpha-\beta)\right)}$$

Baillie y Bollerslev (1992)[v] derivan la siguiente expresión del error cuadrático medio:

$$E_T(v_{T,s}^2) = (k_2 - 1)a^2 \sum_{i=1}^{s-1} (a + b)^{2(1-i)} E_T(s_{t-s-i}^4)$$

En esta expresión, $v_{T,s} = s_{T+s}^2 - E_T(s_{T+s}^2)$ y $k_2$ es el valor del coeficiente de curtosis (el cumulante de orden 2 de la densidad condicional de $\varepsilon_t$, que, si es una normal, sería tres).

## 5. Interpretación intuitiva del proceso GARCH (p,q)

Dado que este proceso es una forma generalizada que recoge, como caso concreto, el ARCH (q), nos centraremos en intentar definir de una forma más sencilla lo que se pretende realizar con la especificación GARCH (p,q).

En el modelo GARCH (1,1) hay dos ecuaciones:

- Una primera, donde se hace depender a la variable $y_t$ del valor de su varianza multiplicada por un cierto término aleatorio que es "ruido blanco"

- En la segunda, en torno a un valor medio, representado por el término constante $\omega$, se hace depender el valor actual de la varianza en el período "t" de los valores que esta haya tenido en el momento anterior (t-1) y de la fluctuación aleatoria que también se daba en el pasado. En definitiva, podríamos definir los tres términos como:

- Media $\omega$: valor de iniciación en torno al cual se producirán ciertas variaciones. También puede entenderse como el valor medio a largo plazo sobre el que se genera la expectativa inmediata a ser modificada por los dos sumandos que después se detallan.
- Sumando $ae_{t-1}$ , innovación sobre la volatilidad que se produjo en el período anterior (término ARCH).
- Sumando $bs_{t-1}^2$: predicción de la varianza en el último período histórico conocido (término GARCH).

El modelo ARCH (1), como simplificación del aquí presentado, sería un GARCH (0,1), donde no se tendría en cuenta la información de predicción sobre la última varianza de la endógena calculable; es decir, la varianza del período anterior.

Matemáticamente, podríamos volver a escribir la especificación del modelo GARCH en dos formas distintas que nos permitirían dar un nuevo enfoque al desarrollo que estamos realizando:

1. En primer lugar, si hacemos una serie de sustituciones recursivas en la fórmula del modelo GARCH planteada, podríamos reescribir la varianza condicional como una media ponderada de todos los residuos al cuadrado del modelo de la siguiente forma:

$$s_t^2 = w + a\ y_{t-1}^2 + b\ s_{t-1}^2$$
$$s_{t-1}^2 = w + a\ y_{t-2}^2 + b\ s_{t-2}^2$$
$$.......$$
$$s_t^2 = w + a\ y_{t-1}^2 + b\ (w + a\ y_{t-2}^2 + b\ s_{t-2}^2) = ... =$$
$$= \frac{1}{1-b} + a \sum b^{j-1} e_{t-j}^2$$

Con lo cual, tendríamos que la varianza condicional es el resultado de un valor medio constante sumado a una media ponderada decrecientemente de los valores de la varianza muestral en los períodos precedentes.

2. Si representamos el error en el valor esperado de la variable al cuadrado como $n_t = e_t^2 - s_t^2$, podríamos reescribir nuevamente el modelo GARCH (1,1) del siguiente modo:

$$e_t^2 = w + (a + b)e_{t-1}^2 + n_t - bn_{t-1}$$

Según esta nueva formulación, con el modelo GARCH (1,1) estamos representando un proceso ARMA(1,1) heterocedástico para la serie de los errores al cuadrado. Algunos autores expresan que el proceso ARCH (q) no sería más que un proceso de medias móviles con parámetros cambiantes o variables (por ejemplo, Tsay (1987)[vi] o Bera (1992)[vii]).

## 6. Variantes sobre el modelo general

Dado que en muchas ocasiones la suma de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ propuestos es muy próxima a uno, la estimación de los modelos GARCH (p,q) entrañan grandes dificultades. Engle y Bollerslev (1986)[viii] propusieron un modelo GARCH Integrado (IGARCH) con las siguiente especificación:

$$y_t = e_t s_t$$
$$s_t^2 = w + s_{t-1}^2 + a(y_{t-1}^2 - s_{t-1}^2)$$

en el que, obviamente, los parámetros suman uno ya que $b = 1 - a$ en el modelo GARCH (1,1). Aunque este proceso es no estacionario (la varianza marginal es infinita), bajo normalidad condicional, $y_t$ es estrictamente estacionario y ergódico, como lo demuestra Nelson (1990). Ciertas disquisiciones sobre ello se pueden encontrar en Keibergen y Van Dijk (1993).[ix]

El proceso muestra, como el resto, valores de predicción nulos, y un error cuadrático medio calculable a partir de la expresión de Engle y Bollerslev (1986) como:

$$ECM(\hat{y}_{t-h}) = wh + ay_T^2 + (1-a)s_T^2$$

Para que la predicción de la varianza tenga sentido, es fundamental que el valor de $\omega$ sea estrictamente positivo. Con ello, las predicciones del ECM crecen linealmente en el horizonte de predicción.

Nelson (1991) critica tres elementos de los procesos GARCH:

- las restricciones de no negatividad de los parámetros son difíciles de lograr en muchas ocasiones.
- Los modelos GARCH no permiten estimar convenientemente el efecto de apalancamiento financiero que aparece en la realidad.
- Los modelos IGARCH son difíciles de llevar a la práctica, siendo confuso el término de persistencia en varianza condicional acuñado por Engle y Bollerslev

Por todo ello determinó una nueva especificación más general que da nombre a los GARCH exponenciales o EGARCH (p,q). Su formulación sería la siguiente:

$$y_t = e_t s_t$$
$$\log s_t^2 = w + \sum_{i=1}^{p} b_i \log s_{t-i}^2 + g(e_{t-1}) + \sum_{i=1}^{q} q_i g(e_{t-1-i})$$
$$g(e) = de + a\left[|e| - E(|e|)\right]$$

donde $\varepsilon_t$ se distribuye como una normal (0,1).

En Los mercados bursátiles, para los cuales se emplea bastante esta técnica de predicción, se oberva empíricamente que los movimientos a la baja son generalmente más volátiles que los movimientos al alza que les siguen. Zkoian (1990)[x] y Glosten (1993)[xi] introducen una variante en los modelos GARCH que denominan asimétrica, precisamente para recoger este tipo de comportamientos. La especificación de la varianza condicional es la siguiente:

$$s_t^t = w + a e_{t-1}^2 + g e_{t-1}^2 d_{t-1} + b s_{t-1}^t$$
$$d_t = 1\, si\, e_t < 0 \text{ y } d_t = 0 \text{ resto casos}$$

Con lo cual, la ficticia creada determina precisamente este comportamiento asimétrico en las innovaciones positivas y negativas.

Evidentemente, las recogidas son sólo algunas de las opciones que han venido surgiendo en la modelización tipo ARCH. En el siguiente cuadro, se hace un recorrido histórico sobre las distintas especificaciones existentes.

Principales especificaciones de la "familia arch" a lo largo del tiempo

| ***Año*** | ***Nombre*** | ***Autor-es*** | ***Especificación de la varianza*** | ***Aportación principal*** |
|---|---|---|---|---|
| 1982 | ARCH | Engle | $h_t = a_0 + a_1 e^2_{t-1}$ | Primera especificación y desarrollo. |
| 1983 | Modelos ARCH Multivar. | Kraft y Engle[xii] | $H_t = a_0 + a_1 e^2_{t-1} + a_2 H_{t-1}$<br>$e_t = y_t - xb$ | Incorporación de más variables explicativas y desarrollo de los modelos aplicando la matriz de varianzas-covarianzas ($H_t$). |
| 1986 | ARCH-M | Engle, Lilien y Robins[xiii] | $h_t = a_0 + a_1 e^2_{t-1}$ | Modelo ARCH incorporando la desviación típica heterocedástica modelizada como explicativa |
| 1986 | GARCH y GARCH en Media | Bollerslev | $h_t = a_0 + a_1 e^2_{t-1} + a_2 h_{t-1}$ | Método generalizado sin restricciones para la estimación de los parámetros ARCH con infinitos retardos. |
| 1986 | LGARCH | Bollerslev y Taylor[xiv] | $h_t = a_0 + a_1 h_{t-1} + a_2 h_{t-1} e^2_{t-1}$ | Linealización del modelo GARCH-M |
| 1986 | MGARCH | Geweke[xv] y Pantula | $\ln(h_t) = a_0 + a_1 \ln(e^2_{t-1}) + a_2 \ln(h_{t-1})$ | Especificación de la varianza multiplicativa (linealizada con logaritmos) |
| 1986 | IGARCH | Engle y Bollerslev[xvi] | $h_t = a e^2_{t-1} + (1-a) h_{t-1}$ | Persistencia en varianza condicional heterocedástica. Modelos integrados en varianza. |
| 1989 | EGARCH | Nelson[xvii] | $\log(h_t) = a_0 + b_1 \log(h_{t-1})$<br>$+g \dfrac{e_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + a\left[\dfrac{e_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{2p}\right]$ | Modelos ARCH para procesos no normales (funciones de densidad exponenciales). Carácter asimétrico de la respuesta a shocks positivos o negativos. |
| 1989 | TS-GARCH | Schwert[xviii] | $\sqrt{h_t} = a_0 + a_1 \sqrt{h_{t-1}} + a_2 \sqrt{h_{t-1}}\,\lvert e^2_{t-1} \rvert$ | Corrección de efectos asimétricos en las variaciones al alza y a la baja |
| 1990 | AGARCH NGARCH | Engle y Ng[xix] | $h_t = a_0 + a_1 h_{t-1} + a_2 h_{t-1} (e_{t-1} - c)^2$ | Contraste y solución de autocorrelación entre la perturbación aleatoria y su varianza. |
| 1990 | FACTOR ARCH | Engle, Ng y Rothschild[xx] | $H_t = \sum_{k=1}^{K} b_k b'_k l_{kt} + \Omega$ | Empleo de la covarianza entre varias series temporales como explicativa de la varianza condicional heterocedástica |
| 1992 | T-GARCH | Gourieroux[xxi]<br>Zakonian (1994)[xxii] | $\sqrt{h_t} = a_0 + a_1 \sqrt{h_{t-1}} + a_2 \sqrt{h_{t-1}}\,\lvert e^2_{t-1} \rvert +$<br>$a \sqrt{h_{t-1}} max(0, e_{t-1})^2$ | Modelos dinámicos donde media y varianza condicionales son funciones stepwise endógenas |
| 1993 | GJR-GARCH | Glosten y Otros[xxiii] | $h_t = a_0 + a_1 h_{t-1} + a_2 h_{t-1} e^2_{t-1} +$<br>$a h_{t-1} max(0, e_{t-1})^2$ | Diferenciación del parámetro en subida y en bajada |
| 1993 | V-GARCH | Engle y Ng[xxiv] | $h_t = a_0 + a_1 h_{t-1} + a_2 (e_{t-1} / \sqrt{h_{t-1}} + c)^2$ | Similar al NGARCH, con una variación mayor en los parámetros asimétricos. |
| 1993 | A-PARCH | Ding y otros[xxv] | $h^d_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i (\lvert e_{t-i} \rvert - g_i \lvert e_{t-i})^d + \sum_{j=1}^{q} b_i h^d_{t-j}$ | Se propone modelizar un valor potencial de la desviación típica que atienda al máximo de la función de autocorrelación del |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | valor absoluto del proceso. |
| 1994 | Modelos ARCH de Régimen Cambiante | Hamilton y Susmel[xxvi] | $\tilde{e}_t = e_t / \sqrt{g_{st}}$<br>$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \tilde{e}^2_{t-i} + x d_{t-1} \tilde{e}^2_{t-1}$<br>$si \quad \tilde{e}_t \leq 0 \quad d_{t-1} = 1$<br>$resto \qquad d_{t-1} = 0$ | Introducción de funciones de densidad que cambian de Normal a t-student a partir de cadenas de Markov. Parámetros ARCH cambiantes a partir de una matriz de "estado" o "régimen" de la variable en el período previo. |
| 1997 | VAR-GARCH | | $h_{(t,i)} = x'b + a_i e^2_{t-1,i} + b_i h_{t-1,i}$<br>$\mathrm{i} = 1,2,...$ (nº variables del VAR) | Empleo de un VAR con residuos con heterocedasticidad condicional. |

## 7. El modelo ARCH-M

La extensión natural del modelo ARCH se produce cuando se realiza un modelo multivariante en el que, además de la varianza del error, son explicativas de la endógena otras variables exógenas del modelo. La formulación quedaría entonces como:

$$y_t = x'g + s_t^2 \ddot{g} + e_t$$
$$s_t^2 = w + \sum_{i=1}^{q} a_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_i s_{t-j}^2$$

En algunos casos, en vez de la varianza se emplea como explicativa la desviación típica. Este modelo, conocido como ARCH-M, se usa habitualmente para predicciones de los mercados financieros en los que se entiende que la rentabilidad de un activo está relacionado con las expectativas de riesgo sobre éste.

## 8. Estimación y contrastación de los modelos

Bajo la hipótesis de normalidad de $\varepsilon_t$, la estimación de los modelos de varianza condicional se puede realizar sin dificultad mediante los estimadores máximo-verosímiles, tal y como demuestra Bollerslev (1993). El posible problema que surge cuando nos encontramos con modelos en los que hay procesos de raíces unitarias en media, el modelo IGARCH permite una estimación perfectamente asequible.

Cuando los residuos no están condicionalmente distribuidos como una normal, el método de estimación a emplear es distinto al habitual. Bollerslev y Wooldridge (1992)[xxvii] propusieron un sistema de estimación conocido como estimadores cuasi-máximoverosímiles.

Para testar la especificación del modelo, se pueden utilizar contrastes del multiplicador de Lagrange de homocedasticidad para el modelo ARCH(q). Éste no se puede emplear en el modelo GARCH (p,q), donde hay presentes problemas de multicolinealidad que invalidan el proceso.

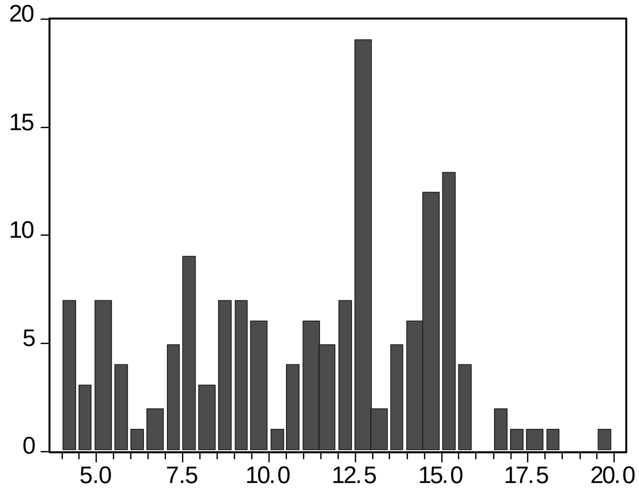
Con el fin de contrastar la normalidad del proceso $\varepsilon_t$ se puede recurrir a su valoración en términos estandarizados con la propia varianza estimada en los modelos ARCH. Para determinar la insegadez de la estimación, se puede realizar una regresión de $y^2_t$ sobre una constante y las estimaciones de la varianza. La $R^2$ puede servir como una medida de la bondad del ajuste logrado. Finalmente, la serie de los cuadrados, una vez ajustada, no debe presentar autocorrelación.

**Contrastes y validación según Ruíz (1993)**[xxviii]

| CONTRASTE | MÉTODO |
|---|---|
| Especificación (sólo ARCH(q))<br>- homocedasticidad | Multiplicador de Lagrange<br>ARCH (q) $\Rightarrow T\cdot R^2$ |
| Normalidad | Contraste de normalidad sobre $\varepsilon_t$ estandarizada con la varianza estimada |
| Insesgadez<br>Pagan y Swert (1990) | Regresión:<br>$y_t^2 = a + b\hat{s}_t^2 + e_t$ |
| Bondad | $R^2$ de la regresión anterior |
| Autocorrelación | Ljung-Box |

EJEMPLO DE APLICACIÓN PARA EL CASO DEL MIBOR A TRES MESES

Modelizaremos el tipo de interés interbancario de oferta deMadrid a tres meses (mibor_3m), cuyas ficha técnica sería la siguiente:




Series: MIBOR_3M
Sample 1986:03 1998:09
Observations 151

| | |
|---|---|
| Mean | 11.07315 |
| Median | 11.63100 |
| Maximum | 19.80300 |
| Minimum | 4.250000 |
| Std. Dev. | 3.683519 |
| Skewness | -0.224830 |
| Kurtosis | 2.092116 |
| Jarque-Bera | 6.458068 |
| Probability | 0.039596 |

El proceso es mesocúrtico y asimétrico. Además, no se presenta como una normal según el análisis de Jarque-Bera.

Realizando el test de Dickey-Fuller ampliado, se puede contrastar la existencia de una raíz unitaria en la formación del proceso aleatorio que estamos definiendo:

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(MIBOR_3M)
Method: Least Squares
Sample: 1986:03 1998:09
Included observations: 151

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| MIBOR_3M(-1) | -0.013259 | 0.012447 | -1.065203 | 0.2885 |
| D(MIBOR_3M(-1)) | 0.367678 | 0.082174 | 4.474385 | 0.0000 |
| D(MIBOR_3M(-2)) | 0.089779 | 0.083143 | 1.079818 | 0.2820 |
| C | 0.123641 | 0.146041 | 0.846618 | 0.3986 |

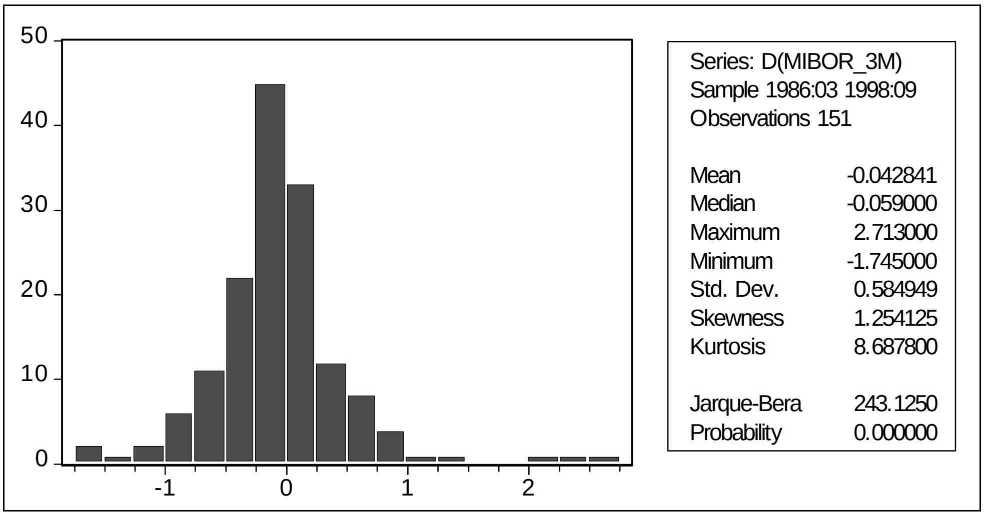
| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.163431 | Mean dependent var | -0.042841 |
| Adjusted R-squared | 0.146359 | S.D. dependent var | 0.584949 |
| S.E. of regression | 0.540450 | Akaike info criterion | 1.633304 |
| Sum squared resid | 42.93669 | Schwarz criterion | 1.713232 |
| Log likelihood | -119.3145 | F-statistic | 9.572604 |
| Durbin-Watson stat | 1.992747 | Prob(F-statistic) | 0.000008 |

El valor del estadístico determinado por la t-student confirma que el parámetro de MIBOR_3M(-1) es igual a cero con un 32% de probabilidad. Es decir, aceptamos la hipótesis nula $H_0(b = (1 - r) = 0)$ en el modelo:

$$\nabla Mibor\_3m_t = a + bMibor\_3m_{t-1} + \sum_{i=1}^{2} g_i \nabla Mibor\_3m_{t-i} + e_t$$

En definitiva, parece necesario realizar una diferencia a la serie para lograr que sea estacionaria en media.

La serie con una diferencia tendría las siguientes características:




En ella, la forma es muy similar a la de la normal (tal y como contrasta el valor de Jarque-Bera), aunque el apuntamiento es mucho mayor que el que cabría esperar en una serie de este tipo (es leptocúrtica y el valor del coeficiente de curtosis vale 8.68, en vez de 3, como ocurre en la normal). Por otro lado, las colas de la serie son inferiores a las que tendría una normal.

Realizando convenientemente la especificación y estimación de la serie mibor_3m con una diferencia y con un proceso ARIMA, se obtienen los siguientes resultados:

Dependent Variable: D(MIBOR_3M)
Method: Least Squares
Sample: 1986:03 1998:09
Included observations: 151
Convergence achieved after 2 iterations

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| AR(1) | 0.393442 | 0.075072 | 5.240861 | 0.0000 |
| R-squared | 0.150207 | Mean dependent var | | -0.042841 |
| Adjusted R-squared | 0.150207 | S.D. dependent var | | 0.584949 |
| S.E. of regression | 0.539231 | Akaike info criterion | | 1.609254 |
| Sum squared resid | 43.61545 | Schwarz criterion | | 1.629236 |
| Log likelihood | -120.4986 | Durbin-Watson stat | | 2.042075 |
| Inverted AR Roots | .39 | | | |

La serie de residuos obtenida no tiene autocorrelación, tal y como se puede contrastar con el test L-Jung-box, por ejemplo. Obviamente, no hay ninguna relación de dependencia entre el residuo y su valor en el período precedente. Si realizáramos una regresión de este con un retardo como explicativa, los valores t-student serían significativos de nulidad de los parámetros; es decir, de no validez de resid(-1) para explicar resid. Sin embargo, si realizamos una regresión con los valores al cuadrado de éstos y su correspondiente primer retardo, sí hay una clara relación de dependencia. Este es el test LM-ARCH para contraste de heterocedasticidad que muchos autores sugieren.:

ARCH Test:

| | | | |
|---|---|---|---|
| F-statistic | 23.56877 | Probability | 0.000000 |
| Obs*R-squared | 36.36524 | Probability | 0.000000 |

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 12/14/98 Time: 19:49
Sample(adjusted): 1986:05 1998:09
Included observations: 149 after adjusting endpoints

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 0.122565 | 0.059005 | 2.077192 | 0.0395 |
| RESID^2(-1) | 0.372149 | 0.081077 | 4.590089 | 0.0000 |
| RESID^2(-2) | 0.196065 | 0.081024 | 2.419846 | 0.0168 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.244062 | Mean dependent var | 0.287027 |
| Adjusted R-squared | 0.233707 | S.D. dependent var | 0.748895 |
| S.E. of regression | 0.655569 | Akaike info criterion | 2.013303 |
| Sum squared resid | 62.74658 | Schwarz criterion | 2.073785 |
| Log likelihood | -146.9911 | F-statistic | 23.56877 |
| Durbin-Watson stat | 2.016019 | Prob(F-statistic) | 0.000000 |

El contraste se realiza como una función de Lagrange en la que se compara el modelo restringido (sin incluir como explicativas del error al cuadrado sus retardos pasados) y el modelo propuesto (incluyéndolos). El cociente entre los ECM de ambos modelos se distribuye como una F-Snedecor con n-q grados de libertad, siendo "q" el número de retardos que incluyamos.

En nuestro caso, el contraste es claramente significativo de la relación cuadrática entre el residuo y sus valores retardados; es decir, parece conveniente construir un modelo ARCH para identificar correctamente el proceso de formación de la varianza del error. Obviamente, el método de estimación ha de ser distinto, por tratarse de modelos no lineales.

$$\nabla Mibor_t = a \nabla Mibor_{t-1} + e_t$$

$$s_t^2 = w + \sum_{i=1}^{q} a_i e_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} b_j s_{t-i}^2$$

En esta primera especificación, el valor de las $\beta_j$ no se está teniendo en cuenta, y sólo se estima la parte ARCH (q) del modelo.

El resultado de estimación sería el siguiente:

Dependent Variable: D(MIBOR_3M)
Method: ML - ARCH
Date: 12/14/98 Time: 20:08
Sample: 1986:03 1998:09
Included observations: 151
Convergence achieved after 14 iterations

| | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| AR(1) | 0.474465 | 0.066006 | 7.188263 | 0.0000 |
| | Variance Equation | | | |
| C | 0.049418 | 0.012253 | 4.033061 | 0.0001 |
| ARCH(1) | 0.558035 | 0.183478 | 3.041434 | 0.0024 |
| ARCH(2) | 0.595854 | 0.113571 | 5.246532 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.143608 | Mean dependent var | -0.042841 |
| Adjusted R-squared | 0.126130 | S.D. dependent var | 0.584949 |
| S.E. of regression | 0.546816 | Akaike info criterion | 1.162139 |
| Sum squared resid | 43.95414 | Schwarz criterion | 1.242067 |
| Log likelihood | -83.74152 | F-statistic | 8.216760 |
| Durbin-Watson stat | 2.208330 | Prob(F-statistic) | 0.000043 |
| Inverted AR Roots | .47 | | |

El modelo es representativo también cuando a la estructura actual le añadimos como explicativa la varianza del período precedente, es decir, incluimos un GARCH (2,1)

$$\nabla Mibor_t = a\nabla Mibor_{t-1} + e_t$$
$$s_t^2 = w + a_1 e_{t-1} + a_2 \; e_{t-2} + b_j s_{t-1}^2$$

De él obtendríamos los siguientes resultados:

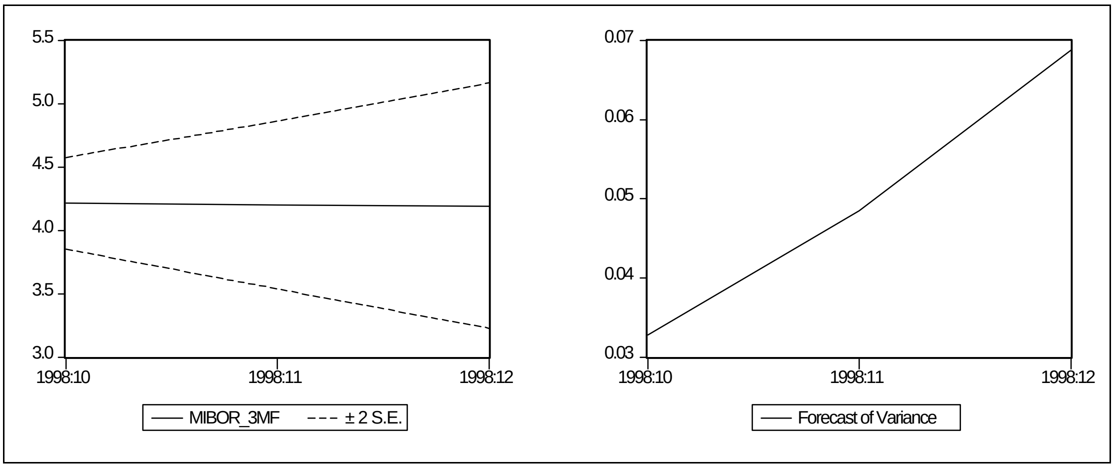
Dependent Variable: D(MIBOR_3M)
Method: ML - ARCH
Date: 12/14/98 Time: 20:11
Sample: 1986:03 1998:09
Included observations: 151
Convergence achieved after 28 iterations

| | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| AR(1) | 0.374688 | 0.091711 | 4.085531 | 0.0000 |
| | Variance Equation | | | |
| C | 0.017592 | 0.008270 | 2.127201 | 0.0334 |
| ARCH(1) | 0.476599 | 0.188173 | 2.532767 | 0.0113 |
| ARCH(2) | 0.345463 | 0.141657 | 2.438734 | 0.0147 |
| GARCH(1) | 0.345023 | 0.119152 | 2.895661 | 0.0038 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.149853 | Mean dependent var | -0.042841 |
| Adjusted R-squared | 0.126561 | S.D. dependent var | 0.584949 |
| S.E. of regression | 0.546681 | Akaike info criterion | 1.131388 |
| Sum squared resid | 43.63359 | Schwarz criterion | 1.231298 |
| Log likelihood | -80.41981 | F-statistic | 6.433756 |
| Durbin-Watson stat | 2.001476 | Prob(F-statistic) | 0.000085 |

| Inverted AR Roots | .37 |
|---|---|

Con este modelo podríamos realizar una razonable predicción de los intervalos de confianza en los que se moverían nuestros valores de previsión, empleando correctamente la varianza del error que hemos estimado.




Ya sólo el valor de predicción de la varianza es una buena representación de la volatilidad a la que esté sujeta un activo determinado. En muchos mercados, se entiende que la prima es directamente proporcional a esta volatilidad, y este sistema permite una buena aproximación de dicha volatilidad.

## ESTIMACIÓN DE UN GARCH(1,1) INICIALIZANDO LOS COEFICIENTES A CERO

**'Programa para estimar un garch(1,1) con un ma(1) en media**

**' Carga de datos**

```
load "c:\eviews3\ibex35.wf1"
SMPL @FIRST @LAST
```

```
series y = lnprecio
```

**' Se establecen dos submuestras: una primera observación para dar los valores iniciales**
**' y el resto para la estimación**

```
sample s0 2 2
sample s1 3 1876
smpl s1
```

**' Declaración de los vectores de coeficientes que se usan en el ARCH likelihood**

```
coef(1) mu = .1
coef(1) theta = .1
coef(2) omega = .1
coef(1) alpha = .1
coef(1) beta = .1
```

**' Inicialización de los coeficientes con un ma(1)**

```
equation eq_temp.ls y c ma(1)
mu(1) = eq_temp.c(1)
theta(1) = eq_temp.c(2)
omega(1) = eq_temp.@se^2
```

**' Inicialización de las series en período premuestral logl**

```
smpl s0
series sig2 = omega(1)
series resma = 0
```

**' Especificación del  GARCH y de la función de verosimilitud**

```
logl ll1
ll1.append @logl logl
```

**' Residuo del modelo MA(1) debido al término constante**

```
ll1.append res = y-mu(1)
```

**'Residuo del MA(1) completo (el de la media y el del término ma)**

```
ll1.append resma = res - theta(1)*resma(-1)
```

**' Modelo GARCH(1,1)**

```
ll1.append sig2 = omega(1)+alpha(1)*resma(-1)^2 +beta(1)*sig2(-1)
```

**' Error estandarizado (dividido por la desviación típica)**

```
ll1.append z = resma/@sqrt(sig2)
```

**' Logaritmo de la función normal la función de distribución normal que utiliza el e-views tiene desviación típica uno  y por eso aquí se le quita el logaritmo de la varianza dividido entre dos**

**' en e-views:)** $@\mathrm{dnorm}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) = (2p)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ **. Por eso antes se estandarizó el  valor del residuo (se le llamó z) y ahora se resta lo que falta de la N(0,sig2)**

```
ll1.append logl =  log(@dnorm(z)) - log(sig2)/2
```

**' Estimación y resultados**

```
smpl s1
ll1.ml(d)
show ll1.output
```

[i] ENGLE, R.F. (1982): *Autorregresive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the U.K. Inflation* Econométrica, 50. Pgs: 987-1008

[ii] RUÍZ, E. (1993): *Modelos para series temporales heterocedästicas* Cuadernos Económicos ICE, 56, Pgs: 73-108

[iii]BOLLERSLEV, T. (1986): *Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity,* Journal of Econometrics, 51. Pgs: 307-327.

[iv] TAYLOR, S.J. (1986): *Modelling Financial Time Series*, John Wiley, Chichester, U.K..

[v] BAILLIE, R.T. y BOLLERSLEV, T (1992): *Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances.* Journal of Econometrics, 58, Pgs: 565-585

[vi] TSAY, S.J. (1987): *Conditional Heterokesdastic Time Series Models* Journal of the American Statistical Association, 82. Pgs: 590-604

[vii]BERA, A.K.; HIGGINS, M.L. y LEE, S. (1992): *Interaction between Autocorrelation and conditional Heterokedasticity: a Random Coefficient Approach* Journal of Business and Economic Statistics, 10, Pgs.:133-142.

[viii] ENGLE, R.F. y BOLLERSLEV, T (1986): *Modelling the Persistence of Conditional Variances,* Econometrics Review, 5, Pgs: 1-50

[ix] KLEIBERGEN,F. Y VAN DIJK,h.k. (1993): *Bayesian and Stochastic Volatility Models* Journal of Business and Economic Statistics.

[x] ZAKOIAN, J.M. (1990): *Treshold Heterokedastic Models* Doc. Trabajo INSEE, París.

[xi] GLOSTEN, LR, JAGANNATHAN, R. Y RUNKLE, D (1993): *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Normal ExcessReturn on Stocks* Journal of Finance, 48, Pgs: 1779-1801.
[xii] KRAFT, D. Y ENGLE,R. (1982): *Autoregresive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series Models.* USCD, Discussion Paper Núm. 82-23.

[xiii] ENGLE, R.F., LILIEN D.M y ROBINS, (1986): *Estimating the Time Varying Risk Premia in the Term Structure"* Econometrica, 55, Pgs.:391-407.

[xiv] TAYLOR, S (1986).: *Modelling Financial Time Series* Wiley. New York.

[xv] GEWEKE, J. Y PANTULA, S.(1986): *Modelling the Persistence of Conditional Variances: a comment.* Econometric Review, 5. Pgs: 57-61 y 71-74

[xvi] ENGLE, R y BOLLERSLEV, T. (1986): *Modelling the Persistence of Conditional Variance* Econometric Reviews 5, 1-50 y 80-87.

[xvii] NELSON, D.B. (1991): *Conditional Heterocedasticity in asset returns: a New Approach"* Econometrica, 59, Pgs: 347-370

[xviii] SCHWERT, GW. (1989): *Why does Stock Market Volatility Change over Time?* Journal of Finance, 44. Pgs: 1115-1153.

[xix] ENGLE,R. Y NG,V. (1993): *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility.* Journal of Fiannce, 48. Pgs: 1749-1778.

[xx] ENGLE,R. NG, V. Y ROTHSCHILD, M. (1990): *Asset Pricing with a FACTOR-ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills.* Journal of Econometrics, 45. Pgs: 213-237.

[xxi] GOURIEROUX, C. (1992): *Qualitative Threshold ARCH Models* Journal of Econometrics, 52, Vol 1-2. Pgs: 159-199

[xxii] ZAKONIAN, J.M.(1994): *Threshold Heteroskedastic Models.* Journal of Economic, Dynamics and Control, 18. Pgs: 931-955.

[xxiii] GLOSTEN, L. JAGANNATAHAN, R. RUNKLE D. (1993): *Relationship between the Expected Vaue and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks.* Journal of Finance, 48. Pgs: 1779-1801.

[xxiv] Idem anterior.

[xxv] DING, Z. GRANGER, W.J. y ENGLE,R (1993): *A long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model.* Journal of Empirical Finance, 1. Pgs: 83-106.

[xxvi] HAMILTON, J. Y SUSMEL, R. (1994): *Autorregresive Codnitional Heroskedasticity and Changes in Regime.* Journal of Econometrics, 64. Pgs 307-333.

[xxvii] BOLLERSLEV, T. Y WOOLDRIDGE,J.M. (1992): *Quasi maximun Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances* Econometric Reviews, 11, Pgs: 143-172.

[xxviii] Ver ii