<u>FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES EN EL CONTEXTO DEL ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES (*)</u>

Ramón Mahía
Junio 1998.

(*) Este documento forma parte de la Tesis Doctoral enmarcada en el área del análisis de cointegración del mismo autor y dirigida por D. José Vicéns Otero.

ÍNDICE DE CONTENIDO

FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES EN EL CONTEXTO DEL ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES

Desde que a principios de los años 70 se presentara la metodología ARIMA como una herramienta útil para "modelizar" el comportamiento de algunas magnitudes susceptibles de ser representadas como una serie temporal, el análisis de series se ha convertido en una referencia econométrica indispensable. Aunque el uso de los modelos de series temporales nacidos a partir de entonces se ha visto en cierto modo eclipsado durante muchos años por enfoque estructural, poco a poco se han ido abriendo espacios de aplicación, oportunidades de desarrollo de estas técnicas a la sombra, muchas veces, de la falta de adecuación perfecta de los modelos "clasicos"[1]. El campo original aportado por Box y Jenkins fue creciendo con la incorporación del concepto de estacionariedad, las preocupación por la modelización de series estacionarias y el planteamiento de lo que vino a llamarse modelos de corrección de error.

En las últimas dos décadas, la idea de la cointegración no ha venido más que a confirmar las posibilidades del análisis de series temporales aportando una herramienta muy valiosa de modelización del equilibrio a largo plazo entre variables. Este "nuevo[2]" camino ha posibilitado un resurgimiento claro de esta otra forma de análisis y, hoy en día, debe formar parte esencial de cualquier económetra.

A la hora de abordar cualquier aspecto relacionado con la cointegración y, en general, con el estudio de series temporales, nos encontramos con múltiples referencias matemáticas al tema de las ecuaciones en diferencias ya que el aspecto fundamental de esta disciplina es, obviamente, la consideración del "tiempo". Si no se dispone de una base adecuada de conocimiento de esta materia, la comprensión de determinadas propiedades, desarrollos y conceptos resulta más compleja. En realidad, el análisis de series temporales supone la estimación de ecuaciones en diferencias que contienen componentes estocásticos.

En general cuando se emprende al principio el estudio de una nueva herramienta, la tentación empuja a no empezar por el principio obviando, si es posible, el abundante aparato matemático que requiere la aplicación de la misma. En el caso del análisis de series temporales, esto no es posible, dado que el desarrollo matemático ha sido importante desde un principio y en cualquier texto las referencias matemáticas que se suponen conocidas por el lector son constantes.

En este documento se pretende exponer de forma sencilla pero matemáticamente completa el cuerpo teórico que rodea la formulación y resolución de ecuaciones en diferencias.

---

[1] *Es evidente la evolución combinada del análisis de series temporales y la econometría estructural en formas como las funciones de transferencia, los modelos VARMA o los modelos de la London School of Economics.*

[2] *Novedoso más que nuevo, dado que su introducción por parte de Granger y Newbold se produjo en 1981.*

1.- DEFINICIONES PRINCIPALES

Una **ecuación ordinaria en diferencias** es una ecuación que contiene una o más diferencias de una función desconocida cuyo argumento es el tiempo:

$$f(y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \Delta^3 y_t .....\Delta^n y_t)$$

donde Δ representa el operador retardo. Si el argumento no es únicamente el tiempo la ecuación pierde el calificativo de ordinaria y pasa a denominarse ecuación en diferencias finitas parciales.

En el contexto del análisis de series temporales, una ecuación de y_t en diferencias es aquella en la que y_t dependerá de **sus valores retardados, del tiempo y de otras variables.** Lo fundamental, en nuestro caso, será la aparición de los propios valores retardados de la variable y_t. Un paseo aleatorio sin deriva del tipo:

$$y_{t+1} = y_t + e_{t+1} \quad \textit{\textbf{(Ec. 1)}}$$

es una ecuación en diferencias con un componente estocástico (ε_t).

En el contexto del análisis de series temporales, interesa principalmente lo que se denomina **Ecuación en diferencias lineal de orden "n" con coeficientes constantes**. La expresión genérica de esta ecuación es:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{t-i} + x_t \qquad \textit{\textbf{(Ec. 2)}}$$

donde los coeficientes a_i se suponen constantes (parámetros) y los "n" términos y_{t-i} son de orden uno (ecuación lineal). El término x_t se denomina ***"proceso de fuerza*[3]*"*** y puede explicitarse de formas muy diversas: función del tiempo, valores actuales y/o retardados de otras variables y/o perturbaciones aleatorias. Por ejemplo, para a_o=0, a_1=1 y x_t=ε_t tenemos la formulación tradicional del paseo aleatorio anterior.

Forma estructural y reducida de una ecuación en diferencias

Una ecuación en la **forma estructural** expresa la variable endógena en función de valores actuales de otra endógena. La **forma reducida**, por el contrario, puede incluir valores retardados de la propia endógena o de otras endógenas pero nunca valores contemporáneos. En el contexto de un modelo multiecuacional de series temporales una ecuación en su forma reducida puede ser expresada en su forma estructural. Una ecuación **univariante en su forma reducida** es aquella en la que la endógena es expresada exclusivamente en función de retardos de ella misma.

[3] *Traducción aproximada del término anglosajón "forcing process".*

2.- SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS: Conceptos previos

Igual que el resto de ecuaciones matemáticas, las llamadas ecuaciones en diferencias admiten una solución para la variable incógnita, en nuestro caso y_t. La solución de una ecuación en diferencias será generalmente otra función, no un único valor.

La función solución expresará y_t en función de "t" y de los elementos del proceso de fuerza (e incluso excepcionalmente de algunos valores iniciales de y_t denominados **condiciones iniciales).** Esta solución, lo será si transforma la ecuación en diferencias en una identidad para cualquier valor del proceso de fuerza x_t y cualquier valor de t. Por ejemplo, para la ecuación simple en diferencias:

$$y_t = 2 + y_{t-1} \quad \textbf{\textit{(Ec. 3)}}$$

la función $y_t = 2t + c$, donde "c" es un término constante cualquiera, es una solución: sustituyendo y_t e y_{t-1} se comprueba enseguida la igualdad:

$$y_t = 2 + y_{t-1} \rightarrow 2t + c = 2 + 2(t-1) + c \rightarrow 2t + c = 2t + c \quad \textit{(Ec. 4)}$$

No se deben confundir soluciones de una ecuación con formas reducidas de la misma. La solución de una ecuación en diferencias no puede incluir retardos de la propia incógnita salvo en el caso antes comentado de que sea necesario considerar condiciones iniciales de partida para y_t.

Es interesante advertir el significado de la solución de una ecuación. Partiendo de una ecuación en la que postulamos que y_t puede expresarse en función de valores pasados propios y_{t-1}, y_{t-2}...etc., la solución de esta ecuación en diferencias nos informa de cómo se forman los valores de y_t por el "paso del tiempo", es decir de la variable "t" y del resto de términos de la ecuación en diferencias (por ejemplo, en el paseo aleatorio, por el componente ε_t).

Ejemplo:

Partiendo de la ecuación en diferencias

$$y_t = 0.2 \cdot y_{t-1} + 0.35 \cdot y_{t-2} \quad \textit{(Ec. 5)}$$

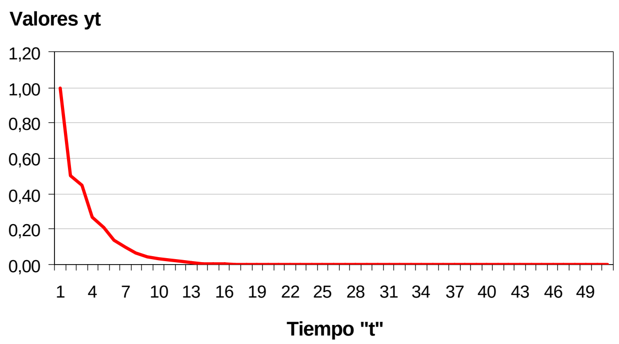
su solución permite observar el patrón de formación temporal de los valores de y_t.

Efectivamente, sin entrar por ahora en su cálculo, la solución a esta ecuación podría ser[4]:

$$y_t = 0.83 \cdot (0.7)^t + 0.17 \cdot (-0.5)^t$$

[4] *Decimos "podría" porque los coeficientes de la solución dependen de los valores iniciales dados a y_0 e y_1 que en este caso fueron $y_0=1$ e $y_1=0.5$.*

Esta solución permite observar el patrón de formación temporal de los valores de y_t en el siguiente gráfico:



3.- SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS POR ITERACIÓN

Aunque no será el método propuesto en este documento para obtener la solución de una ecuación en diferencias, existe una primera forma de obtener la solución de una ecuación en diferencias que se conoce como solución por iteración.

Supuesto un valor inicial (y_0) conocido

Si partimos de la expresión de la ecuación en diferencias:

$$y_t = 2 + 0.5 \cdot y_{t-1} + e_t \qquad \textit{(Ec. 6)}$$

y suponemos conocido el valor inicial y_0 podemos escribir:

$$y_1 = 2 + 0.5 \cdot y_0 + e_1 \qquad \textit{(Ec. 7)}$$

por tanto, si a partir de la igualdad para y_2, y sustituimos sucesivamente hacia delante, tenemos:

$$y_2 = 2 + 0.5 \cdot y_1 + e_2 = 2 + 0.5 \cdot (2 + 0.5 \cdot y_0 + e_1) + e_2 = 2 \cdot (1 + 0.5) + 0.5^2 \cdot y_0 + 0.5 \cdot e_1 + e_2$$

y para y_3 de forma similar:

$$y_3 = 2 + 0.5 \cdot y_2 + e_3 = 2(1 + 0.5 + 0.5^2) + 0.5^3 y_0 + 0.5^2 \cdot e_1 + 0.5 \cdot e_2 + e_3$$

por lo que, observando la regla de formación hacia delante podríamos concluir que:

$$y_t = 2\sum_{i=0}^{t-1} 0.5^i + 0.5^t \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} 0.5^i e_{t-i} \qquad \textit{(Ec. 8)}$$

que es efectivamente una solución para la ecuación planteada ya que expresa y_t en función de “t”, el proceso de fuerza y un valor conocido y_0.

Supuesto que no se conoce un valor inicial (y_0)

Si no se conoce ningún valor inicial para y_0, el método no nos es de utilidad. La forma de solucionarlo es, a partir de la Ec. (7), realizar una nueva sustitución sucesiva, en este caso, hacia atrás (para t=-1, t=-2...etc.). En ese caso, la expresión (7) adopta la forma:

$$y_t = 2\sum_{i=0}^{t-1} 0.5^i + 0.5^t \cdot (2 + 0.5 \cdot y_{-1} + e_0) + \sum_{i=0}^{t-1} 0.5^i e_{t-i} = 2\sum_{i=0}^{t} 0.5^i + \sum_{i=0}^{t} 0.5^i e_{t-i} + 0.5^{t+1} y_{-1}$$

y después de "m" períodos:

$$y_t = 2\sum_{i=0}^{t+m} 0.5^i + \sum_{i=0}^{t+m} 0.5^i e_{t-i} + 0.5^{t+m+1} y_{-m-1} \qquad \textit{(Ec. 9)}$$

dado que el coeficiente 0.5 es menor que uno en valor absoluto podemos suponer que, a medida que "m" tienda a infinito, el último término de la Ec. (9) tenderá a cero y el sumatorio del primer y segundo miembro convergerá a 1/(1-0.5)[5]. Por tanto, la forma final de la solución puede ser:

$$y_t = \frac{2}{(1-0.5)} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i e_{t-i} \qquad \textit{(Ec. 10)}$$

aunque la realidad es que también será una solución cualquier transformación del tipo:

$$y_t = A \cdot 0.5^t + \frac{2}{(1-0.5)} + \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i e_{t-i} \qquad \textit{(Ec. 11)}$$

donde "A" es una constante arbitraria.

A primera vista, esta segunda solución parece más sencilla que la primera pero, sin embargo, no es así. En primer lugar encontramos una sucesión de infinitos términos que complica su utilización discreta, en segundo lugar, la presencia del parámetro "A" induce una arbitrariedad "molesta" y, en tercer lugar, no está claro que el procedimiento sirva si el parámetro hubiera sido mayor que la unidad.

Tampoco la primera solución está exenta de limitaciones dado que, recordemos, nos vemos obligados a obtener un valor conocido para y_0. Si la ecuación fuera de segundo orden, deberemos conocer dos valores iniciales de y_t en un caso, o dos constantes arbitrarias A_1 y A_2 en el otro caso.

---

[5] *Basta con recordar la expresión de los "n" términos de una progresión geométrica de razón "r" y primer término a_0:*

$$S = \frac{a_0(1 + r^n)}{(1-r)}$$

4.- SOLUCIÓN HOMOGENEA Y PARTICULAR

Planteamiento

El procedimiento general de resolución de ecuaciones en diferencias parte de descomposición de la solución **completa (y_t)** en dos partes claramente diferenciadas: la solución **homogénea (y_t^h)** y la solución **particular (y_t^p)**.

$$y_t = y_t^h + y_t^p \quad \text{(Ec. 12)}$$

La solución homogénea resolverá sólo la ecuación homogénea que puede identificarse en toda ecuación general en diferencias. Este sistema homogéneo considerará únicamente los valores de y_t con sus retardos (y_{t-1}, y_{t-2}...etc.). Por ejemplo, en la ecuación:

$$y_t = 2 + 0.5y_{t-1} - 3y_{t-2} + e_t$$

el sistema homogéneo será:

$$y_t - 0.5y_{t-1} + 3y_{t-2} = 0$$

Como todo sistema homogéneo, éste admitirá, como veremos más adelante, la solución trivial $y_t = y_{t-1} = y_{t-2}=0$ o bien una serie de infinitas soluciones a partir de dos constantes arbitrarias A_1 y A_2.

La solución particular atenderá a la porción de la ecuación no considerada en el sistema homogéneo, en nuestro ejemplo, la parte formada por el término independiente y la perturbación aleatoria ε_t. El procedimiento total de resolución comprenderá pues las siguientes etapas:

1. Identificar la ecuación homogénea y encontrar las “n” soluciones homogéneas posibles a la misma, es decir, encontrar la llamada <u>solución general homogénea.</u>
2. Encontrar una solución particular.
3. Formar la solución completa como suma de la homogénea y particular.
4. Eliminar las constantes arbitrarias imponiendo una serie de condiciones iniciales.

4.A.- Obtención de la solución homogénea: ecuación y raíces características

Sin pérdida de generalidad vamos a proponer una sencilla transformación que permite obtener la llamada solución general para el sistema homogéneo de cualquier ecuación en diferencias ordinaria, lineal, de diferencias finitas y de coeficientes constantes.

Supongamos el caso más sencillo de todos, una ecuación genérica de primer orden del tipo:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \{x_t\} \quad \text{(Ec. 13)}$$

cuyo sistema homogéneo será:

$$y_t - a_1 y_{t-1} = 0 \quad \textit{(Ec. 14)}$$

Si realizamos ahora la transformación $y_t=\alpha^t$, la ecuación queda:

$$\alpha^t - a_1 \alpha^{t-1} = 0 \quad \textit{(Ec. 15)}$$

expresión que, dividiendo a ambos lados por el factor común α_{t-1}, podríamos transformar en:

$$(\alpha - a_1) = 0$$

Esta ecuación se denomina **ecuación característica** y a sus soluciones **raíces características**. La solución (raíz característica) de esta ecuación será $\alpha=a_1$ que efectivamente es una solución para "α". Dado el cambio de variable:

$$y_t = \alpha^t \rightarrow y_t = a_1^t$$

también para la ecuación inicial se cumple la identidad correspondiente:

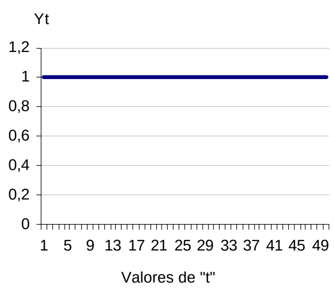
$$a_1^t - a_1 a_1^{t-1} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

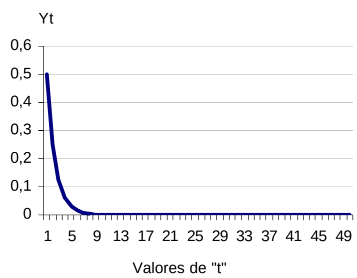
En seguida puede observarse como, además, dada la solución anterior, la expresión $A(a_1)^t$ también será una solución a la ecuación, donde "A" es una constante arbitraria cualquiera. En virtud de esa propiedad inmediata obtenemos lo que antes hemos denominado solución homogénea general:

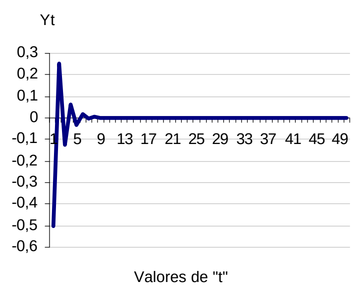
$$y_t^h = A \cdot a_1^t \quad \textit{(Ec. 16)}$$

Resulta fácil observar cómo según la forma genérica de la solución homogénea, la secuencia representada por los valores de y_t sólo será convergente cuando $|a_1| \leq 1$. Concretamente, para "A=1" la representación gráfica de los tres patrones temporales de evolución de y_t serán:

$a_1 = 1$	$0 < a_1 < 1$	$-1 < a_1 < 0$
Evolución constante hacia "A"	*Convergencia directa a 0*	*Convergencia oscilante a 0*







Ecuaciones de segundo grado

Examinemos ahora un caso más general, una ecuación en diferencias de segundo orden con un proceso de fuerza genérico x_t:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \{x_t\} \quad \textit{(Ec. 17)}$$

El sistema homogéneo será entonces:

$$y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = 0 \quad \textit{(Ec. 18)}$$

y, realizando el mismo cambio que en el caso de la ecuación de primer orden, obtenemos la correspondiente ecuación característica, en este caso de segundo grado:

$$\alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 = 0 \quad \textit{(Ec. 19)}$$

Las raíces características serán por tanto las que corresponden a cualquier solución de una ecuación cuadrática, es decir:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \end{aligned} \quad \textit{(Ec. 20)}$$

Cualquiera de las dos raíces permite obtener una solución para y_t de la forma $A(\alpha)^t$. Resulta además inmediato comprobar que, dadas las dos soluciones representadas por las raíces características α_1 y α_2 , cualquier combinación lineal de las mismas será también una solución para y_t.

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \rightarrow 1^{a}\, \textit{Solución} \equiv A_1(\alpha_1)^t \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \textit{Solución combinación} \equiv A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t \\ &\alpha_2 \rightarrow 2^{a}\, \textit{Solución} \equiv A_2(\alpha_2)^t \end{aligned}$$

La demostración es sencilla:

$$\begin{aligned} &y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = \\ &= A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t - a_1(A_1(\alpha_1)^{t-1} + A_2(\alpha_2)^{t-1}) - a_2(A_1(\alpha_1)^{t-2} + A_2(\alpha_2)^{t-2}) = \\ &= \left[A_1(\alpha_1)^t - a_1 A_1(\alpha_1)^{t-1} - a_2 A_1(\alpha_1)^{t-2}\right] + \left[A_2(\alpha_2)^t - a_1 A_2(\alpha_2)^{t-1} - a_2 A_2(\alpha_2)^{t-2}\right] = \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

El procedimiento puede generalizarse sin problemas especiales para sistemas de un orden superior "p" variando exclusivamente la expresión de las "p" raíces características que definirán la solución de la ecuación. La solución general homogénea será, por combinación lineal de las "p" soluciones individuales de la forma:

$$y_t^h = \sum_{i=1}^{p} A_i (a_i)^t \qquad \textit{(Ec. 21)}$$

Es obvio que las "p" constantes arbitrarias A_i que se introducen en la solución pueden eliminarse de la expresión generando un sistema de "p" ecuaciones con "p" incógnitas utilizando los "p" valores iniciales conocidos para y_t, por ejemplo, para *p=2*:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_1 (a_1)^0 + A_2 (a_2)^0 \\ y_1 &= A_1 (a_1)^1 + A_2 (a_2)^1 \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 22)}$$

4.B.- Obtención de la solución homogénea a partir del polinomio de retardos

Una forma sencilla alternativa de obtener la solución al sistema homogéneo de una ecuación en diferencias es operar con el polinomio de retardos. Partiendo de la expresión inicial:

$$y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = 0 \qquad \textit{(Ec. 23)}$$

podemos escribir:

$$y_t (1 - a_1 L - a_2 L^2) = 0 \qquad \textit{(Ec. 24)}$$

es evidente entonces que las soluciones de la ecuación se corresponden con las raíces del polinomio de retardos entre paréntesis, o sea:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{-2 \cdot a_2} \\ L_2 &= \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{-2 \cdot a_2} \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 25)}$$

Estas raíces permiten resolver la ecuación en diferencias y puede comprobarse que cada una de ellas se corresponde con la recíproca de cada una de las raíces características α_1 y α_2. Efectivamente, si L_i es una raíz del polinomio de retardos, se cumplirá que:

$$1 - a_1 L_i - a_2 L_i^2 = 0 \qquad \textit{(Ec. 26)}$$

y resulta fácil comprobar que $L_i = 1/\alpha_i$ observando como se cumple la ecuación característica:

$$a_i^2 + a_1 a - a_2 = 0 \qquad \textit{(Ec. 27)}$$

ya que:

$$\left(\frac{1}{L_i}\right)^2 + a_1\left(\frac{1}{L_i}\right) - a_2 = \frac{L_i - a_1 L_i^2 - a_2 L_i^3}{L_i^3} = \frac{1 - a_1 L_i - a_2 L_i^2}{L_i^2} = \frac{0}{L_i^2} = 0$$

4.C.- Condiciones de estabilidad de la solución homogénea de una ecuación de segundo grado

Dada la expresión genérica de la solución homogénea general de una ecuación en diferencias, es obvio que el proceso y_t no será convergente (estacionario) para cualquier valor de α_1 y α_2 o, dicho de otra forma, para cualquier valor de a_1 y a_2. En principio, vamos a partir de dos situaciones básicas según la naturaleza real o imaginaria de las raíces características de la ecuación, distinguiendo tres casos principales.

Caso 1. Raíces reales y distintas

Las raíces características de una determinada ecuación serán reales y distintas siempre y cuando el discriminante de la expresión:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \quad \textit{(Ec. 28)}$$

sea positivo y distinto de cero; dicho de otra forma, cuando:

$$a_1^2 + 4a_2 > 0 \quad \textit{(Ec. 29)}$$

En este caso, la solución general será la propuesta en el desarrollo genérico:

$$y_t = A_1(\alpha_1)^t + A_2(\alpha_2)^t \quad \textit{(Ec. 30)}$$

Obviamente, la secuencia y_t sólo será convergente (estacionaria) si α_1 y α_2 son menores o iguales a la unidad, independientemente del valor de las constantes arbitrarias. Si utilizamos las raíces del polinomio de retardos de la ecuación en diferencias, entonces la condición de estabilidad implicará que éstas sean superiores a la unidad dado que α_i=1/L_i.

Realizando sencillas transformaciones algebraicas podemos implicar en las condiciones de estabilidad también a los coeficientes a_1 y a_2 de la ecuación original. Para la raíz α_i mayor tenemos:

$$a_1 + (a_1^2 + 4a_2)^{1/2} < 2 \rightarrow (a_1^2 + 4a_2)^{1/2} < 2 - a_1 \rightarrow a_1^2 + 4a_2 < 4 + a_1^2 - 4a_1$$

es decir, $a_1 + a_2 < 1$ *(Ec. 31)*

y para la raíz más pequeña, del mismo modo, obtendríamos, $a_2 - a_1 < 1$ *(Ec. 32)*

Dentro del amplio conjunto de soluciones convergentes representadas por pares (a_1, a_2), el patrón de convergencia puede ser muy diferente tal y como se muestra a continuación.

Figura 1

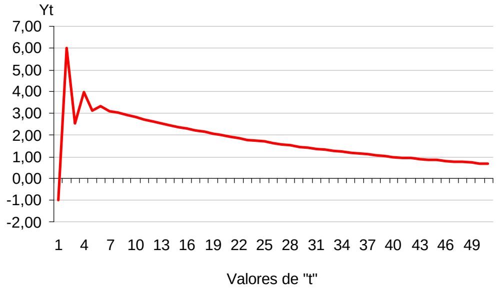


Figura 2

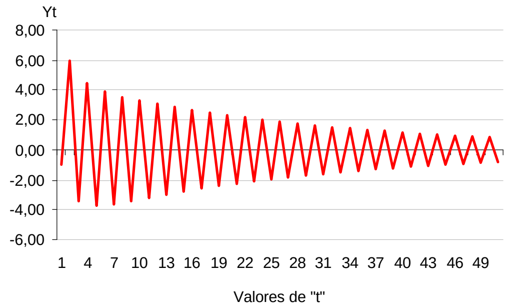


Figura 3

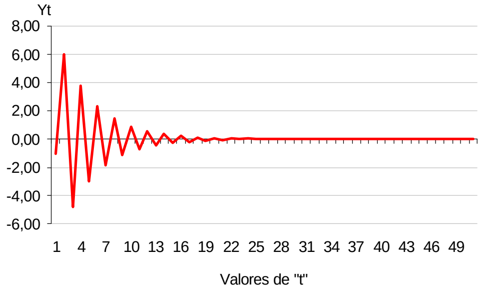
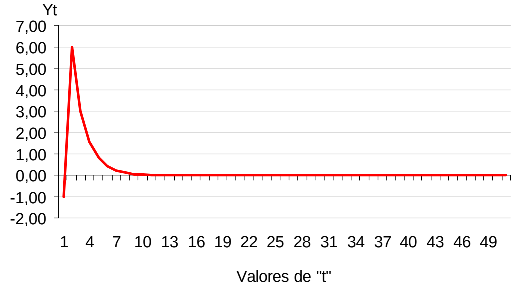


Figura 4



Las cuatro figuras anteriores se corresponden con cuatro distintas ecuaciones de segundo orden resueltas para los mismos valores y_0 e y_1 iniciales pero con distintos parámetros a_1 y a_2.[6] Puede observarse como, por ejemplo, dada la forma de la solución general, la presencia de raíces características negativas supone un comportamiento oscilatorio más o menos amortiguado mientras que en el caso de raíces positivas la convergencia es directa (salvando el valor negativo de los valores iniciales)

Caso 2. Raíces reales e idénticas

Dada la expresión de las raíces características, si el discriminante de la expresión:

$$\alpha_i = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \qquad (Ec.\ 33)$$

es nulo, las dos raíces serán reales pero idénticas:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = {}^{a_1}\!/_{2} \qquad (Ec.\ 34)$$

En estas circunstancias, puede comprobarse fácilmente que una segunda solución para la ecuación en diferencias toma la forma:

[6] *La figura 1 ha sido generada con (a_1=0.5;a_2=0.45), la segunda con (a_1=-0.5;a_2=0.45), la tercera con (a_1=-0.8;a_2=-0.01) y la última con (a_1=0.5;a_2=-0.01). Las constantes arbitrarias A_1 y A_2 han sido generadas en todos los casos partiendo de los valores iniciales y_0=-1 e y_1=6.*

$$y_t^h = t\left({a_1}/{2} \right)^t \quad \textit{(Ec. 35)}$$

Para demostrarlo basta con sustituirla en la ecuación en diferencias y comprobar la igualdad:

$$\begin{gathered} y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = 0 \\ t(a_1/2)^t - a_1(t-1)(a_1/2)^{t-1} + a_2(t-2)(a_1/2)^{t-2} = 0 \\ t(a_1/2)^2 - a_1(t-1)(a_1/2)^1 - a_2(t-2) = \\ -\left[(a_2^1/4) + a_2\right]t + \left[(a_2^1/2) + 2a_2\right] = 0 \end{gathered}$$

teniendo en cuenta que en la última igualdad las expresiones entre corchetes se anulan dado que partimos de la condición $a^2_1+4a_2=0$.

Por tanto, la solución homogénea general que puede considerarse ahora será una combinación lineal de ambas soluciones de la forma:

$$y_t^h = A_1 \cdot (a_1/2)^t + A_2 \cdot t(a_1/2)^t \quad \textit{(Ec. 36)}$$

donde de nuevo A_1 y A_2 son constantes arbitrarias que pueden eliminarse considerando dos valores iniciales y_0 e y_1.

Dada la expresión anterior, en este caso, las condiciones de estabilidad de la ecuación requieren una vez más que la raíz característica única α_1 sea menor que la unidad. El término $t(a_1/2)^t$ no supone problemas de convergencia para “t” infinito en la medida en que efectivamente:

$$\lim_{t\to\infty} t(a_1/2)^t = 0$$

Esta condición para α_i viene a significar obviamente que el coeficiente a_1 de la ecuación deberá ser menor que “2” en valor absoluto:

$$a = a_1/2 < 1 \rightarrow |a_1| < 2$$

Al mismo tiempo, la condición de estabilidad para a_1 fuerza necesariamente el valor de estabilidad de a_2 dado que el discriminante de la ecuación característica debe ser nulo; de esta forma, el parámetro a_2 deberá comprenderse necesariamente entre 0 y -1

$$|a_1| < 2 \quad \xrightarrow{a_1^2+4a_2=0} \quad -1 < a_2 < 0$$

La forma de la solución homogénea, y en especial su segundo término, determina para este tipo de procesos un aspecto muy particular de su patrón de convergencia. Cuando a_1 es positivo (y menor que 2) el proceso converge a cero tras un momento inicial de aspecto explosivo (figura 1 inferior) mientras que cuando a_1 es negativo (y mayor que –2) la solución parece oscilar de forma explosiva para converger después bruscamente, y también de forma oscilante, a cero:

Figura 1

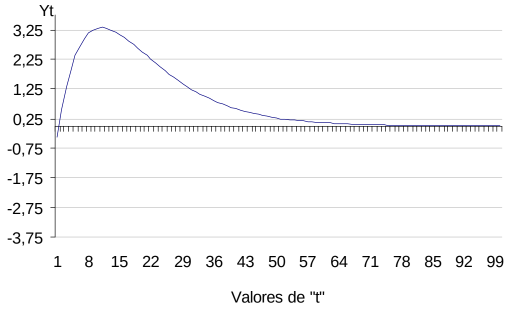
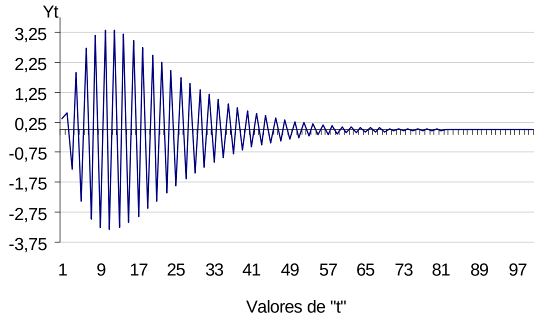


Figura 2



<u>Caso 3. Raíces imaginarias</u>

Cuando el discriminante de la expresión de cálculo de las raíces características es negativo, no pueden obtenerse soluciones reales para la ecuación analizada. Esto sólo puede ocurrir si a_2 es positivo en la ecuación original ya que en la expresión de este discriminante el término a_1 aparece elevado al cuadrado. Las dos raíces conjugadas tendrían la expresión:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + i\sqrt{-d}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{a_1 - i\sqrt{-d}}{2} \qquad \textit{(Ec. 37)}$$

O bien, si hacemos los cambios:

$$l = a_1/2$$
$$q = \sqrt{-(a_1^2 + 4a_2)}/2$$

la expresión más habitual:

$$\alpha_1, \alpha_2 = l \pm iq \qquad \textit{(Ec. 38)}$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

La solución homogénea general toma entonces la forma habitual:

$$y_t^h = A_1(l + iq)^t + A_2(l - iq)^t \qquad \textit{(Ec. 39)}$$

donde A_1 y A_2 son las constantes arbitrarias habituales que ahora serán números complejos conjugados que pueden determinarse partiendo de condiciones iniciales y_0 e y_1. Aunque no se ha hecho en ninguno de los dos anteriores casos conviene en este caso observar cómo es la dinámica de su obtención. Partiendo de y_0 para t=0 e y_1 para t=1 puede plantearse el sistema:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_1 + A_2 \\ y_1 &= A_1(l + iq) + A_2(l - iq) \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 40)}$$

Dado que A_1 y A_2 son número complejos[7] podemos expresarlos como:

$$A_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \cdot i$$

$$A_2 = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C \cdot i$$

donde el factor ½ se ha incluido sólo por conveniencia. Sustituyendo estos valores en la Ec.40 y resolviendo para B y C tenemos:

$$\begin{aligned} B &= y_0 \\ C &= (l y_0 - y_1)/q \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 41)}$$

Puede observarse además como:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= B \\ A_1 - A_2 &= C \cdot i \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 42)}$$

Alternativamente y recordando el teorema de Moivre podemos escribir la solución homogénea general reflejada en la Ec.39 de la forma:

$$y_t^h = Ar^t \operatorname{sen}(w \cdot t - e) \qquad \textit{(Ec. 43)}$$

donde A y ε se obtendrán a partir de dos constantes arbitrarias B y C (como A_1 y A_2 en el caso general), el parámetro “r” es lo que se denomina módulo o valor absoluto del número complejo, y “w” está elegida de forma que satisfaga simultáneamente la expresión:

$$\cos(w) = \frac{a_1}{2(-a_2)^{1/2}} \qquad \textit{(Ec. 44)}$$

Sin entrar en el desarrollo completo, esta transformación parte de la expresión de las raíces características en forma polar. Para ello deben realizarse las siguiente transformaciones:

$$\begin{aligned} l &= r \cdot \cos w \\ q &= r \cdot \operatorname{sen} w \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 45)}$$

donde obviamente:

---

[7] *Dado que las dos raíces características son complejas y, sin embargo y_h es real, es matemáticamente necesario que A_1 y A_2 sean números complejos.*

$$l^2 + q^2 = r^2$$

y por tanto $r=(-a_1)^{1/2}$.

Si las transformaciones de la Ec.45 se sustituyen en la Ec.39 la solución homogénea general puede expresarse como:

$$\begin{aligned} y_t &= A_1(r\cdot\cos w + ir\cdot\text{sen } w)^t + A_2(r\cdot\cos w - ir\cdot\text{sen } w)^t = \\ &= A_1 r^t(\cos w + i\cdot\text{sen } w)^t + A_2 r^t(\cos w - i\cdot\text{sen } w)^t \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 46)}$$

Con lo que aplicando el teorema de Moivre a la anterior expresión tenemos:

$$\begin{aligned} y_t &= r^t\left[A_1(\cos w\cdot t + i\cdot\text{sen } w\cdot t) + A_2(\cos w\cdot t - i\cdot\text{sen } w\cdot t)\right] = \\ &= r^t\left[(A_1 + A_2)\cos w\cdot t + (A_1 - A_2)\, i\cdot\text{sen } w\cdot t\right] \end{aligned} \qquad \textit{(Ec. 47)}$$

con lo que, dadas las igualdades de la Ec.42 tenemos:

$$y_t = r^t\left[B\cos wt - C\,\text{sen } wt\right] \qquad \textit{(Ec. 48)}$$

Esta expresión es la expuesta inicialmente en la Ec. 43 ya que partiendo de la transformación:

$$B = A\cos e \qquad \mathrm{C} = A\,\text{sen } e \qquad \textit{(Ec. 49)}$$

tenemos que:

$$y_t = Ar^t\left[\cos e\,\cos wt - \text{sen}\, e\,\text{sen } wt\right] \qquad \textit{(Ec. 50)}$$

que mediante una sencilla transformación trigonométrica queda finalmente:

$$y_t^h = Ar^t\,\text{sen}(w\cdot t - e) \qquad \textit{(Ec. 51)}$$

Esta expresión de la solución homogénea es relativamente compleja de obtener pero permite establecer con mayor sencillez los patrones de evolución temporal del proceso y_t ya que la anterior expresión es una función trigonométrica fácilmente representable.

- Debe notarse como el parámetro "r" define la **amplitud de la representación Ar^t**, una amplitud variable, lógicamente, ya que depende del parámetro "t". Para que la secuencia representada por y_t sea convergente, será necesario que "r" sea menor que uno en valor absoluto. Debe observarse que la expresión de este parámetro "r" es:

$$r = (-a_2)^{1/2}$$

por lo que la condición de estacionariedad obliga a que a_2 sea menor que la unidad en valor absoluto[8].

- El parámetro **"w" representa lo que se denomina frecuencia angular** y define el número de ciclos por unidad de tiempo, es decir, la inversa del período. La frecuencia se mide en radianes e indica el número de ciclos que hay por unidad de tiempo.

- El parámetro **ε representa lo que se denomina fase**, que viene a indicar la situación del ciclo en cada momento del tiempo. Define de forma especial la ordenada en el origen (t=0).

El patrón de convergencia de este tipo de soluciones viene determinado por los valores de los parámetros a_1 y a_2 de la ecuación original en la medida en que estos determinan la amplitud, frecuencia angular y fase de la representación trigonométrica.

El valor del parámetro a_2 es, obviamente, el más determinante ya que condiciona de forma directa la amplitud de la curva ("r") y de forma indirecta su frecuencia angular ("w"). A mayor valor del parámetro dentro de los límites de convergencia mayor es la amplitud de la curva y su frecuencia angular. En las figuras que se muestran a continuación aparecen dos ecuaciones con el mismo parámetro a_1 y distinto a_2 inicializadas para los mismos parámetros A=1.5 y fase(ε)=2π.

Figura 1

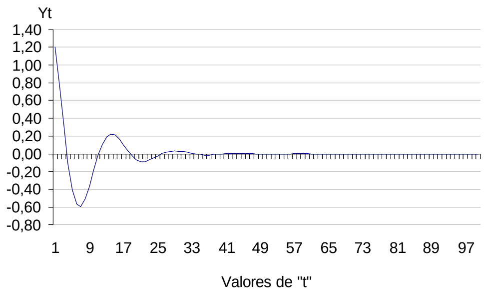
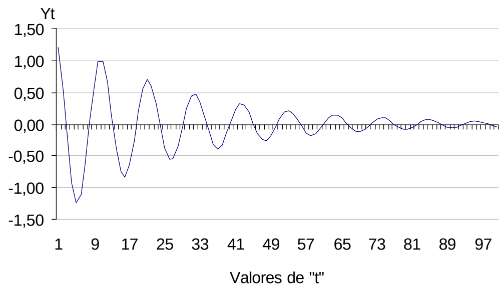


Figura 2



En la figura 1, el parámetro a_2 es igual a 0.77 y en la figura 2 toma el valor 0.93. Resulta sencillo comprobar en la segunda figura tanto la mayor amplitud como frecuencia angular así como la menor velocidad de convergencia al valor cero.

El parámetro a_1 también interviene en la forma de la secuencia de convergencia de este tipo de ecuaciones en diferencias. En este caso, a_2 interviene de forma indirecta en la determinación de la frecuencia angular. Cuando el valor de a_1 es positivo, la

[8] *Ya sabemos, en cualquier caso, que a_2 es un número positivo ya que sólo de esta forma la ecuación puede tener soluciones imaginarias.*

frecuencia angular “w” presenta un coseno negativo lo que determina un tránsito brusco entre valores positivos y negativos.

Esta característica se observa fácilmente en el gráfico de la solución, que pierde su aspecto “ondulante” y toma forma de “dientes de sierra”; las figuras que se muestran a continuación son idénticas a las anteriores salvo por el valor del parámetro a_1 que es ahora positivo e igual a 1.6:

Figura 1 (bis)

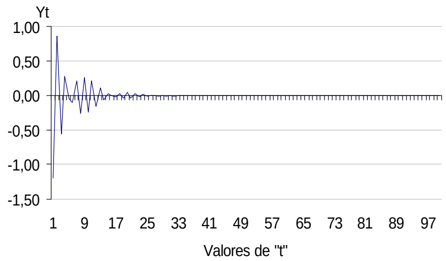
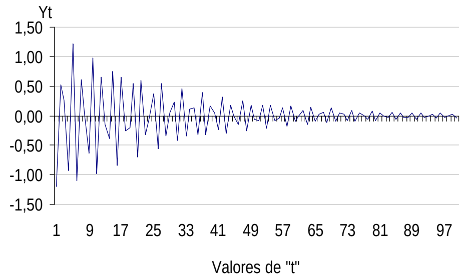


Figura 2 (bis)



4.E.- El celebre círculo unitario

Casi de forma automática, cualquier texto introductorio al análisis de las series temporales nos presenta las condiciones de convergencia (estacionariedad) de los procesos autorregresivos con la siguiente frase:

“ *Un proceso autorregresivo será estacionario (convergente) si sus raíces caen dentro del círculo unitario o si las raíces de su polinomio de retardos caen fuera del mismo*”

Esta frase puede resultar, sin duda, incomprensible si no se han revisado los conceptos que se han expuesto hasta este momento en el presente texto. Una vez que se tiene claro el concepto de raíz característica y su papel en la determinación de la solución homogénea de una ecuación en diferencias, resulta inmediato comprender esta condición. Efectivamente, la solución homogénea tiene la forma general:

$$y_t^h = A_1(a_1)^t + A_2(a_2)^t \quad \textit{(Ec. 52)}$$

donde α_1 y α_2 son las raíces características. Dada esta forma general, está claro que la convergencia (estacionariedad) de la ecuación en diferencias (proceso autorregresivo) pasa por que α_1 y α_2 sean menores que la unidad, pero: ¿por qué decimos que α_1 y α_2 deben caer dentro de un ***“círculo”*** unitario y no simplemente que deben ser menores que 1?.

La razón es que cuando α_1 y α_2 son enteras, bastaría una recta para representarlas, por lo que el “círculo”, es decir las dos dimensiones, serían innecesarias; pero cuando α_1 y α_2 son imaginarias, necesitamos una representación en dos ejes, uno real y otro imaginario, para representar raíces imaginarias del tipo:

$$a_1 = \frac{a_1 + i\sqrt{-d}}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1 - i\sqrt{-d}}{2}$$

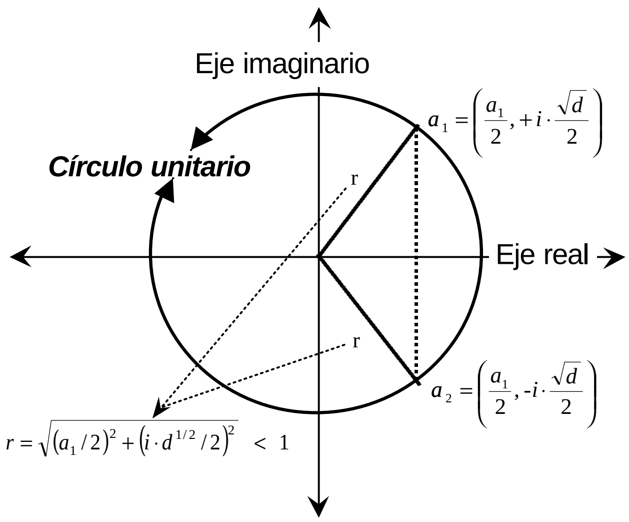
No obstante, cuando este es el caso, la pregunta sigue siendo: ¿por qué un ***"circulo"*** y por qué ***"unitario"***?. Si usamos la doble representación real/imaginaria, cada una de las raíces características vendrá representada por una coordenada del tipo:

$$a_1 = \left(\frac{a_1}{2}, +\frac{i\sqrt{-d}}{2}\right)$$
$$a_2 = \left(\frac{a_1}{2}, -\frac{i\sqrt{-d}}{2}\right)$$

es decir, una será la conjugada de la otra. La condición de convergencia en el caso de raíces imaginarias obligaba a que el parámetro "r" de amplitud fuera menor que la unidad, un parámetro que podía expresarse como:

$$r = (-a_2)^{1/2}$$

Pero resulta, y aquí está la clave, que este parámetro "r" es precisamente la distancia que separará las soluciones α_1 y α_2 del origen del plano real/imaginario sean cuales sean estas, luego necesariamente el par de soluciones (α_1,α_2) deberá estar dentro de un círculo unitario como en el que se muestra en la ilustración presentada a continuación.



Cuando las soluciones son reales, basta el eje horizontal (real) para representarlas, cuando son imaginarias, deben "caer dentro del círculo unitario" ya que de otra forma el radio "r" sería superior a 1 y la solución no sería convergente.

4.D.- Obtención de la solución particular

Obviamente, la solución homogénea no resuelve más que el sistema homogéneo de la ecuación en diferencias. Para obtener la solución completa será necesario incorporar en la solución general, junto a la solución homogénea, la denominada solución particular, tal y como planteábamos en la Ec.12.:

$$y_t = y_t^{\text{hom}\,ogénea} + y_t^{particular}$$

En el caso de la siguiente ecuación en el que el término de fuerza es nulo, tenemos no obstante un término constante e igual a 1/2:

$$y_t = -0.25 y_{t-1} + 0.5 \quad \textit{(Ec. 53)}$$

la solución homogénea es de la forma[9]:

$$y_t^h = A(a)^t = -0.5(-0.25)^t$$

pero efectivamente puede comprobarse fácilmente que esta solución no resuelve la ecuación completa Ec.53 debido precisamente a la aparición del término constante (0.5):

$$-0.5(-0.25)^t \neq -0.25\left(-0.5(-0.25)^{t-1}\right) + 0.5 \rightarrow -0.5(-0.25)^t \neq -0.5(-0.25)^t + 0.5$$

La solución completa requiere incorporar la solución particular que, en este caso, puede intuirse fácilmente que tendrá la siguiente expresión constante:

$$y_t^p = \frac{0.5}{(1+0.25)} \quad \textit{(Ec. 54)}$$

Es sencillo calcular cómo ahora la solución completa:

$$y_t = y_t^h + y_t^p = -0.5(-0.25)^t + \frac{0.5}{(1+0.25)}$$

si soluciona la ecuación para y_t:

$$-0.5(-0.25)^t + \frac{0.5}{(1+0.25)} = -0.25\left(-0.5(-0.25)^{t-1} + \frac{0.5}{(1+0.25)}\right) + 0.5$$

$$\left(-0.5(-0.25)^t\right) = \left(-0.5(-0.25)^t\right) - \left(0.25 \cdot \frac{0.5}{(1+0.25)} 0.5 - \frac{0.5}{(1+0.25)} + 0.5\right)$$

[9] A fin de que la solución sea "replicable" debe especificarse que se ha considerado $y_0=0$

ya que la segunda expresión entre paréntesis del lado derecho de la ecuación toma valor cero.

Solución particular con procesos de fuerza deterministas

Vamos a considerar primero el caso en el que el sistema NO contiene componentes estocásticos. La forma de encontrar con rapidez la solución particular es asumir que y_t se comporta de forma análoga a la parte no homogénea de la ecuación original, parte no homogénea que denominaremos g(t).

Caso 1. g(t) constante

El caso ilustrado anteriormente con el ejemplo numérico es una situación particular de un caso genérico del tipo:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_{t-2} y_{t-2} + ... + a_p y_{t-p} \quad \textit{(Ec. 55)}$$

en el que el proceso de fuerza es nulo pero aparece en la ecuación original un término constante. Si asumimos que y_t se comportará como la parte no homogénea g(t) estamos asumiendo la constancia de $y_{t:}$

$$y_t = g(t) \rightarrow y_t = y$$

Si sustituimos y_t=y en la ecuación original Ec.55 obtenemos la solución particular que, en este caso, será igual a una constante:

$$y = a_0 + a_1 y + a_{t-2} y + ... + a_p y \rightarrow y_t^p = \frac{a_0}{(1 - a_1 - a_{t-2} - ... - a_p)} \quad \textit{(Ec. 56)}$$

resultado que es coherente con el obtenido en el ejemplo numérico expuesto en el apartado anterior (Ec.54).

Esta solución representa precisamente el valor de convergencia de y_t para infinitas observaciones, siempre y cuando estemos hablando de un proceso y_t estacionario y es por eso por lo que, a veces, se define la solución particular como el punto de equilibrio del proceso a largo plazo:

$$\lim_{t \to \infty} y_t = \lim_{t \to \infty} \left(y_t^h + y_t^p \right) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left(\left(A_1 (a_1)^t + A_2 (a_2)^t + \cdots + A_p (a_p)^t \right) + \frac{a_0}{(1 - a_1 - a_{t-2} - ... - a_p)} \right) =$$
$$= \frac{a_0}{(1 - a_1 - a_{t-2} - ... - a_p)}$$

Caso 2. g(t) función del tiempo (y_t *con tendencia determinista*)

La ecuación genérica sería ahora:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + bt \qquad \textit{(Ec. 57)}$$

lo que equivale a introducir en el proceso estocástico una tendencia determinista. En este caso, asumiendo de nuevo que y_t se comporta como g(t) debemos considerar que y_t será también una función del tiempo:

$$g(t) = a + b \cdot t \;\; \rightarrow \;\; y_t = \alpha + \beta \cdot t \qquad \textit{(Ec. 58)}$$

Sustituyendo y_t y g(t) en la ecuación Ec.57 tenemos:

$$\alpha + \beta \cdot t - a_1(\alpha + \beta \cdot (t-1)) - a_2(\alpha + \beta \cdot (t-2)) - \ldots - a_p(\alpha + \beta \cdot (t-p)) = a_0 + b \cdot t \; \textit{(Ec. 59)}$$

con lo que reagrupando los términos para los coeficientes comunes α y β tenemos:

$$\alpha(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p) + \beta(a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p) + \beta(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p) \cdot t = a_0 + b \cdot t$$

e igualando término a término queda:

$$\alpha(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p) + \beta(a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p) = a_0$$
$$\beta(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p) = b$$

pudiendo calcular α y β, los parámetros genéricos de la solución particlar propuestos en la Ec.57:

$$\alpha = \frac{a_0 - \beta(a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p)}{(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p)} \qquad \beta = \frac{b}{(1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_p)} \qquad \textit{(Ec. 60)}$$

Caso 3. g(t) exponencial (*caso específico de y_t con tendencia determinista no lineal*)

Un caso especial de tendencia no lineal es aquel en el que g(t) es función exponencial del tiempo:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + bd^t \qquad \textit{(Ec. 61)}$$

en este caso, el procedimiento sugiere que y_t deberá comportarse según un patrón exponencial similar:

$$y_t = \alpha d^t \qquad \textit{(Ec. 62)}$$

sustituyendo, como en los casos anteriores, esta expresión en la Ec.61 para calcular el parámetro α tenemos:

$$\alpha d^{t} - a_1 \alpha d^{t-1} - a_2 \alpha d^{t-2} - .... - a_p \alpha d^{t-p} = bd^{t}$$

de donde sacando factor común:

$$\alpha d^{t}\left(1 - a_1 d^{-1} - a_2 d^{-2} - .... - a_p d^{-p}\right) = bd^{t}$$

o sea:

$$\alpha = \frac{b}{\left(1 - a_1 d^{-1} - a_2 d^{-2} - .... - a_p d^{-p}\right)}$$

4.E.- Aproximación matemática al concepto de raíz unitaria

Con lo visto hasta aquí podemos realizar una interesante aproximación matemática al concepto de raíz unitaria. Es sabido que una serie temporal y_t no estacionaria en media puede transformarse en una serie estacionaria integrándose la serie un determinado número "d" de veces; a esta serie se la denomina entonces serie integrada de orden "d". Cuando la serie es integrada de orden uno I(1), decimos que la serie presenta una raíz unitaria: ¿Qué significa esto matemáticamente?.

Cuando decimos que una serie tiene una raíz unitaria debemos entender que lo que estamos señalando es que una de las raíces características de la ecuación característica definida por el sistema homogéneo de esta ecuación es igual a la unidad. Por ejemplo, en la ecuación:

$$y_t = +0.25y_{t-1} + 0.75y_{t-2} + 1.2$$

efectivamente una de las raíces del sistema homogéneo:

$$y_t - 0.25y_{t-1} - 0.75y_{t-2} = 0$$

es igual a la unidad:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} = 1 \qquad \alpha_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} = 0.8$$

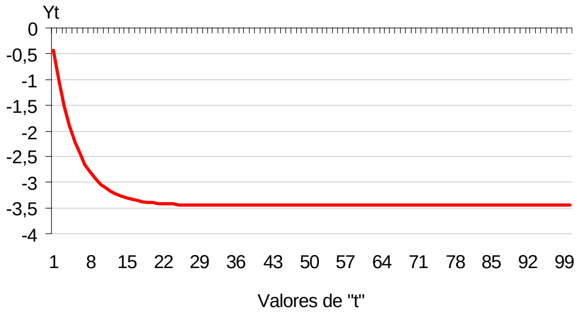
Sin embargo, dada la expresión genérica de la solución homogénea general introducida en la Ec.21, no hay ninguna razón que explique la NO ESTACIONARIEDAD (convergencia) del proceso y_t ya que esta tomaría la forma, también convergente:

$$y_t^h = \sum_{i=1}^{p} A_i(\alpha_i)^t \rightarrow y_t^h = A_1 \cdot (1)^t + \sum_{i=2}^{p} A_i(\alpha_i)^t \qquad \textit{(Ec. 63)}$$

por ejemplo, para y_0=1 e y_1=-0.75, la solución homogénea sería:

$$y_t^h = -3.44(1)^t + 3.75(0.80)^t$$

que es claramente convergente:



¿Dónde reside, por tanto, la razón de la No estacionariedad (no-convergencia)? : la respuesta está en la solución particular.

Efectivamente, la ecuación presentada en el ejemplo de este apartado y todas aquellas con una raíz unitaria, presentan una particularidad aritmética muy importante que influye decisivamente en la forma de su solución particular: la suma de los coeficientes autorregresivos es igual a la unidad:

$$a_1 + a_2 + ... + a_p = 1$$

Esta propiedad hace que la solución particular no pueda plantearse en el espacio finito con las expresiones genéricas vistas en los apartados anteriores. Así, para el caso de un término g(t) constante, la solución no podrá ser:

$$y_t^p = \frac{a_0}{(1 - a_1 - a_{t-2} - ... - a_p)}$$

ya que el denominador de esta expresión sería nulo. Tampoco, y por la misma razón, para el caso de una tendencia lineal determinista será posible aplicar la forma propuesta en Ec.60.

En ambos casos, la no-convergencia de la solución particular genérica sugiere la aparición en esta solución particular de una tendencia temporal. En el caso concreto más sencillo, con g(t) constante definido en Ec.55:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_{t-2} y_{t-2} + ... + a_p y_{t-p}$$

puede comprobarse como la solución particular no puede ser ahora:

$$y_t^p = \frac{a_0}{(1 - a_1 - a_{t-2} - ... - a_p)}$$

y sin embargo, si proponemos la presencia de una tendencia temporal:

$$y_t^p = c \cdot t \qquad \textit{(Ec. 64)}$$

podemos calcular “c” sin mayor problema:

$$ct = a_0 + a_1 c(t-1)y + a_{t-2}c(t-2) + ... + a_p c(t-p) \rightarrow c = \frac{a_0}{(a_1 + 2a_{t-2} + ... + pa_p)}$$

cumpliéndose la ecuación inicial.

En el ejemplo numérico propuesto al principio de este apartado, el valor de ese término “c” es:

$$c = \frac{a_0}{(a_1 + 2a_{t-2})} = \frac{1.2}{(0.25 + 2 \cdot 0.75)} = 0.69$$

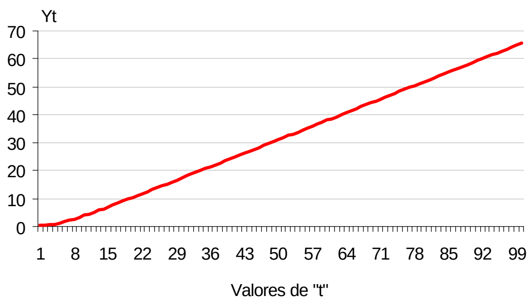
por lo que la solución particular será, conforme a la Ec.64:

$$y_t^p = c \cdot t = 0.69 \cdot t$$

y la solución completa:

$$y_t = y_t^h + y_t^p = -3.44 + 3.75(0.80)^t + 0.69 \cdot t$$

Efectivamente puede observarse entonces como la serie integrada de orden uno no es estacionaria ya que esta solución completa no podrá nunca ser convergente dado el término tendencial 0.69t. La serie y_t presentará, por tanto, una tendencia lineal:

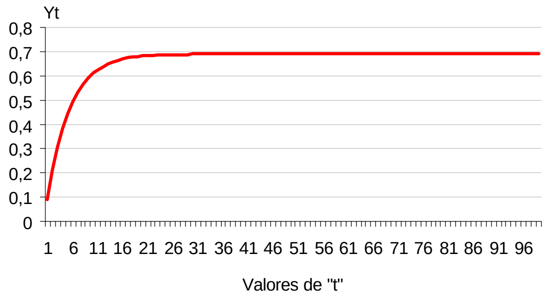


La serie en diferencias, sin embargo, será efectivamente estacionaria; generando la ecuación en diferencias y operando sencillamente puede observarse cómo la ecuación resultante de tercer orden no presentaría problemas de raíces unitarias:

$$y_t = +0.25y_{t-1} + 0.75y_{t-2} + 1.2 \;\; (1)$$
$$y_{t-1} = +0.25y_{t-2} + 0.75y_{t-3} + 1.2 \;\; (2)$$

$$(1)\text{-}(2) \equiv y_t - y_{t-1} = +0.25(y_{t-1} - y_{t-2}) + 0.75(y_{t-2} - y_{t-3}) =$$
$$\rightarrow y_t = 1.25y_{t-1} + 0.5y_{t-2} - 0.75y_{t-3}$$

y su representación gráfica sería claramente convergente:



4.F.- Solución particular con procesos de fuerza estocásticos

En el contexto del análisis de series temporales, en todas las ocasiones, el denominado proceso de fuerza contendrá, no sólo un término constante o tendencial, sino un componente aleatorio. Hasta el más sencillo de los procesos autorregresivos, estará representado por un modelo estocástico AR(1) en el que aparecerá una perturbación aleatoria "ε_t". En estos casos, los métodos propuestos en el apartado anterior para tres casos específicos no serán suficientes para obtener una solución completa en la ecuación en diferencias y, por otro lado, las condiciones de convergencia no podrán ser enunciadas para cada caso si no se tiene en cuenta el carácter estocástico del proceso de fuerza.

El método propuesto para obtener la solución particular de una ecuación en diferencias será el conocido como **"Método de Coeficientes Indeterminados"**. Este método es conceptualmente sencillo aunque su falta de desarrollo hace que, en ocasiones, resulte complejo de aplicar. El método parte de la idea de que la solución a una ecuación en diferencias lineal es necesariamente lineal. Las etapas que definen este método son:

- Se propone una solución "proyecto" genérica; una función de carácter lineal que contenga todos los términos que se prevé aparecerán en la solución real multiplicados por una serie de parámetros desconocidos

- Se sustituye la solución proyecto en la ecuación original

- Se resuelven los coeficientes de la solución proyecto que garantizan la identidad de la ecuación independientemente de los valores de las variables incluidas

- Si no es posible obtener una identidad la conclusión debe ser que la solución proyecto no es adecuada por lo que debe proponerse otra diferente y repetir de nuevo el proyecto

Por ejemplo, supongamos un proceso AR(1):

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t \qquad \textit{(Ec. 65)}$$

Cuya solución homogénea ya es conocida. Dados los términos que aparecen en el proceso de fuerza, seguramente la solución particular podrá expresarse como una función de un término constante y los valores presentes y pasados del término ε_t.

$$y_t = b_0 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-i} \qquad \textit{(Ec. 66)}$$

El problema será encontrar los valores de b_0 y α_i que hacen válida esta solución para todos los casos en la Ec.65. Debe notarse que no se ha incluido explícitamente el tiempo en la solución proyecto (Ec.66) dado que, del anterior apartado, hemos aprendido que la presencia de una tendencia determinista en la solución particular es algo circunscrito al caso concreto de presencia de una raíz unitaria.

Para encontrar los coeficientes específicos de la solución particular sustituimos Ec.66 en la ecuación original:

$$b_0 + a_0 e_t + a_1 e_{t-1} + a_2 e_{t-2} + ... + ... = a_0 + a_1\left(b_0 + a_0 e_{t-1} + a_1 e_{t-2} + a_2 e_{t-3} + ... + ...\right) + e_t$$

Esta ecuación debe cumplirse para todo valor de ε_t. Agrupando a uno lado los coeficientes fijos y dependientes de los términos ε_t tenemos:

$$\left(b_0 - a_0 - a_1 b_0\right) + \left(a_0 - 1\right)e_t + \left(a_1 - a_1 a_0\right)e_{t-1} + \left(a_2 - a_1 a_1\right)e_{t-2} + ... = 0$$

o lo que es igual, contamos con el siguiente conjunto de identidades:

$$\begin{array}{l} b_0 - a_0 - a_1 b_0 = 0 \\ ---------- \\ a_0 - 1 = 0 \\ a_1 - a_1 a_0 = 0 \qquad \textit{(Ec. 67)} \\ a_2 - a_1 a_1 = 0 \\ .. \\ .. \end{array}$$

De ellas podemos deducir de forma recursivamente y fácilmente el valor de los parámetros idóneos para que la ecuación proyecto sea una solución generalmente válida:

$$b_0 - a_0 - a_1 b_0 = 0 \;\rightarrow\; b_0 = \frac{a_0}{(1-a_1)}$$

$$\alpha_0 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 - a_1\alpha_0 = 0 \;\rightarrow\; \alpha_1 - a_1 \cdot 1 = 0 \;\rightarrow\; \alpha_1 = a_1$$

$$\alpha_2 - a_1\alpha_1 = 0 \;\rightarrow\; \alpha_2 - a_1 \cdot a_1 = 0 \;\rightarrow\; \alpha_2 = a_1^2$$

$$......\alpha_i = a_1^i$$

Por lo que la solución particular adoptará la forma:

$$y_t^p = \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{t-i} \quad (Ec.\ 68)$$

de donde la solución genérica total será:

$$y_t = y_t^h + y_t^p = A(a_1)^t + \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{t-i} \quad (Ec.\ 69)$$

para obtener el valor de A, basta con contar con un valor inicial para y_0 y sustituirlo en esa expresión:

$$y_0 = A + \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{-i} \quad \rightarrow \quad A = y_0 - \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{-i}$$

de forma que la Ec.69 queda finalmente:

$$y_t = (a_1)^t \left[y_0 - \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{-i} \right] + \frac{a_0}{(1-a_1)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i e_{t-i} \quad (Ec.\ 70)$$

Debe notarse cómo esta ecuación no es una ecuación valida en todo caso ya que, si a_1 fuese igual a la unidad, es decir, si estuviésemos ante una raíz unitaria, la expresión no sería calculable en el espacio finito. Este hecho sugiere que la solución proyecto formulada en la Ec.66 no es válida cuando el proceso contiene una raíz unitaria y debe formularse una solución alternativa. Tal y como vimos en los casos genéricos de solución particular para procesos de fuerza deterministas, en presencia de una raíz unitaria convenía introducir una tendencia temporal en la solución particular; por tanto, en estos casos, la solución proyecto será:

$$y_t = b_0 + b_1 t + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_{t-i} \quad (Ec.\ 71)$$

y, siguiendo el método propuesto más arriba, la solución particular resultante final será:

$$y_t^p = y_0 + a_0 t + \sum_{i=0}^{t} e_i \qquad \textit{(Ec. 72)}$$

donde una vez más puede observarse la presencia de un a tendencia determinista que domina el patrón de evolución del proceso a lo largo del tiempo.

5.- UN EJEMPLO PRÁCTICO COMPLETO

Obtener la solución completa de la siguiente ecuación en diferencias obtenida de la estimación de un proceso ARMA(1,1) dado el valor y_0=0.75:

$$y_t = 0.5 - 0.3 y_{t-1} + e_t + 0.2 e_{t-1}$$

<u>Solución homogénea:</u>

Sistema homogéneo:

$$y_t + 0.3 y_{t-1} = 0$$

haciendo $x^t = y_t$ tenemos:

$$x^t + 0.3 x^{t-1} = 0$$

dividiendo la expresión entre x^{t-1}:

$$x + 0.3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0{,}3$$

con lo que la solución homogénea toma la forma:

$$y_t^h = A(-0.3)^t$$

<u>Solución particular:</u>

Se propone la solución genérica:

$$y_t = b_0 + b_1 t + \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-i}$$

y se sustituye en la ecuación original:

$$b_0 + b_1 t + \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-i} = 0.5 - 0.3\left[b_0 + b_1 (t-1) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{t-1-i} \right] + e_t + 0.2 e_{t-1}$$

agrupando por términos (constante, tendencial “t” y ε_{t-i}) tenemos:

$$\left(b_0 - 0.5 + 0.3b_0 - 0.3b_1\right) + \left(b_1 + 0.3b_1\right)t$$
$$+\left(a_0 + 1\right)e_t + \left(a_1 + 03a_0 - 0.2\right)e_{t-1} + \sum_{i=2}^{\infty}\left(a_i + 0.3a_{i-1}\right)e_{t-i} = 0$$

por lo que, para que esta igualdad se cumpla para todo valor de "t" y ε_t tenemos:

$$\begin{array}{l} \left(b_0 - 0.5 + 0.3b_0 - 0.3b_1\right) = 0 \\ ----------- \\ \left(b_1 + 0.3b_1\right) = 0 \\ ----------- \\ \left(a_0 + 1\right) = 0 \\ \left(a_1 + 0.3a_0 - 0.2\right) = 0 \\ \left(a_2 + 0.3a_1\right) = 0 \\ \left(a_3 + 0.3a_2\right) = 0 \\ .. \\ .. \end{array}$$

de donde resulta:

$$\left(b_1 + 0.3b_1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad b_1 = 0$$

lo que es coherente con el hecho de que no estemos ante un proceso con una raíz unitaria ($a_1 \neq 1$), y además:

$$\left(b_0 - 0.5 + 0.3b_0 - 0.3b_1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad b_0 = \frac{0.5}{(1+0.3)} = 0.38$$

y por último:

$$\begin{array}{l} \left(a_0 + 1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad a_0 = 1 \\ \left(a_1 + 0.3a_0 - 0.2\right) = 0 \quad \rightarrow a_1 = -0.1 \\ \left(a_2 + 0.3a_1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = 0.3 \cdot -0.1 \\ \left(a_3 + 0.3a_2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad a_3 = \left(0.3\right)^2 \cdot \left(-0.1\right) \\ .... \quad \rightarrow \quad a_i = \left(0.3\right)^{i-1} \cdot \left(-0.1\right) \end{array}$$

por tanto, la solución final resulta:

$$y_t = A(-0.3)^t + 0.38 + e_t + \sum_{i=1}^{\infty}\left(0.3\right)^{i-1}(-0.1)e_{t-i}$$

Si utilizamos el valor inicial y_0=0.75 propuesta en el enunciado podemos eliminar la constante A arbitraria:

$$A = 0.75 - 0.38 - e_0 - \sum_{i=1}^{\infty}\left(0.3\right)^{i-1}(-0.1)e_{-i}$$

y sustituirla en la ecuación de la solución completa para acabar obteniendo:

$$y_t = \left[0.75 - 0.38 - e_0 - \sum_{i=1}^{\infty} (0.3)^{i-1} (-0.1) e_{-i}\right] (-0.3)^t + 0.38 + e_t + \sum_{i=1}^{\infty} (0.3)^{i-1} (-0.1) e_{t-i}$$

que convenientemente operada queda finalmente:

$$y_t = +0.38 + 0.37(-0.3)^t + (-0.3)^t \sum_{i=1}^{t-1} (0.3)^{i-1} (-0.1) e_{t-i} + e_t$$

REFERENCIAS BIBLIOGFRÁFICAS:

La referencia fundamental utilizada para la elaboración de este documento es el texto Difference Equations del Manual Applied Econometric Series, del profesor Walter Enders de la Universidad de Iowa[10]. Otras referencias importantes son:

- Box, G., & Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control.* San Francisco, Calif.: Holden Day.

- Kells, L.M. (1979). *Ecuaciones diferenciales elementales.* Ed. Del Castillo. Madrid

- Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko, G.(1979). *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ed. MIR.

- Simons, G.F. (1988). *Ecuaciones diferenciales.*Ed. McGraw-Hill.

- Uriel, E. (1992). *Análisis de series temporales*. Modelos ARIMA. Colección ábaco. Ed. Paraninfo.

[10] *Enders, W. (1995). Applied Econometric Time Series. John Wiley & Sons, INC. New York*