| | | |
|---|---|---|
| Universidad Autónoma de Madrid | **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>Convocatoria **2024**<br><br>**MATERIA: MATEMÁTICAS II** | ESPECÍFICA |

## INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

**INSTRUCCIONES**: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
**TIEMPO Y CALIFICACIÓN**: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ \alpha x + 2y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + z = 1 \end{cases}$

a. (1.5 puntos) Discuta el sistemas según los valores del parámetro real $\alpha$.

b. (1 punto) Resuelva para $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$ si es posible.

**Ejercicio 2. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x}$ se pide:

a. (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$.

b. (1.5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{x-1}{2}$, calcule el área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$.

**Ejercicio 3. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

a. (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de las dos rectas.

b. (0.75 puntos) Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas $r$ y $s$.

c. (1 punto) Sean $P$ y $Q$ los puntos de las rectas $r$ y $s$ respectivamente que pertenecen al plano de ecuación $z = 0$ determine la recta que contiene a ambos puntos.

**Ejercicio 4. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0.45$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.85$ y $P(B|A) = 0.25$. Se pide:

a. (2 puntos) Calcule $P(A \cap B)$,$P(A)$,$P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b. (0.5 puntos) Deduzca de manera razonada si los sucesos $A$ y $B$ son independientes.

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$

a. (1 punto) Halle el determinante de la matriz.

b. (0.5 puntos) Calcule los valores de $\lambda$ para los cuales no existe $A^{-1}$.

c. (1 punto) Calcule la inversa para $\lambda = -1$.

**Ejercicio 2. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Dada la función $f(x) = \frac{x^4+3x^3+1}{x^3-x^2}$

a. (0.5 puntos) Determine el dominio de la función.

b. (1 punto) Calcule las asíntotas verticales de la función.

c. (1 punto) Calcule las asíntotas oblícuas de la función.

**Ejercicio 3. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Dado el plano $\pi \equiv x = y + 1$ y los puntos $A = (2, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 0)$ pertenecientes al plano $\pi$:

a. (1.25 punto) Si $A$ y $B$ son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{ABCD\}$, todos pertenecientes a $\pi$. Calcule los posibles puntos $C$ y $D$.

b. (1.25 punto) Si $E = (0, 1, 0)$ forma parte de la arista $AE$ de un paralelepípedo formado por los posibles cuadrados anteriores y esta arista. Calcule el volumen los posibles paralelepípedos.

**Ejercicio 4. Calificación máxima:** 2.5 puntos

Queremos comprar un billete a Estocolmo desde Madrid pero no hay vuelos directos, todos tienen escala en Frankfurt. El vuelo de Madrid a Frakfurt tarda 160 min con una desviación típica de 15 min siguiendo una distribución normal.

a. (1.25 puntos) Para conectar con el vuelo a Estocolmo es necesario que el avión tarde menos de T = 180 min. Calcule la probabilidad de perder el avión a Estocolmo.

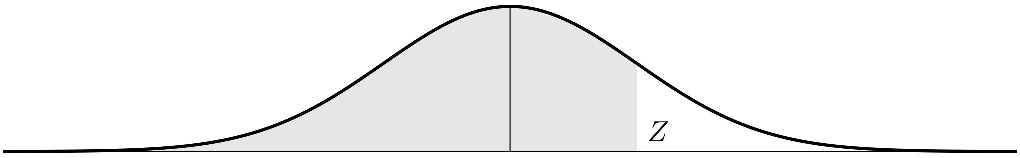
b. (1.25 puntos) Calcule el valor de T para que la probabilidad de perder el segundo avión sea del 1%.

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID**
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS
Convocatoria **2024**

**MATERIA: MATEMÁTICAS II**

ESPECÍFICA

# Distribución Normal




Ejemplo: si $Z$ tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$

| $z_n$ | 0.0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |

## MATEMATICAS II

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

---

**A.1**

a. Cálculo del determinante: 0.5 puntos. Por el estudio de cada uno de los dos casos: 0.5 puntos.

b. Por el planteamiento de cada valor de $\alpha$: 0.25 puntos. Por cada solución: 0.25 puntos.

---

**A.2**

a. Cálculo del dominio: 0.25 puntos. Cálculo de la derivada: 0.25 puntos. Determinación del intervalo de crecimiento: 0.5 puntos.

b. Cálculo del intervalo de integración 0.25 puntos. Planteamiento de la integral 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos. Solución: 0.5 puntos.

---

**A.3**

a. Planteamiento: 0.5 puntos. Solución: 0.25 puntos.

b. Planteamiento: 0.5 puntos. Solución: 0.25 puntos.

c. Planteamiento: 0.5 puntos. Solución: 0.5 puntos.

---

**A.4**

a. Por cada uno de los valores solicitados: planteamiento 0.25 puntos, solución 0.25 puntos.

b. Planteamiento: 0.25 puntos. Solución: 0.25 puntos.

**B.1**

a. Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo del determinante: 0.5 puntos.

b. Cálculo del único valor real 0.25. Por determinar que sólo hay una raíz real: 0.25 puntos.

c. Planteamiento: 0.5 puntos. Matriz inversa correcta: 0.5 puntos.

---

**B.2**

a. Por el planteamiento: 0.25 puntos. Dominio correcto: 0.25 puntos.

b. Planteamiento: 0.5 puntos. Por cada asíntota: 0.25 puntos.

c. Planteamiento: 0.5 puntos. Por cada asíntota (aunque sea la misma): 0.25 puntos.

---

**B.3**

a. Por el planteamiento: 0.25 puntos. Por cada pareja de puntos 0.5 puntos.

b. Planteamiento: 0.5 puntos. Por el planteamiento del cálculo del volumen: 0.25 puntos. Por el cálculo cada volumen (o que se dé cuenta que tienen el mismo volumen): 0.25 puntos.

---

**B.4**

a. Por la normalización de la variable: 0.5 puntos. Por el planteamiento del cálculo de la probabilidad: 0.25 puntos. Por el cálculo correcto de la probabilidad: 0. puntos.

b. Planteamiento: 0.25 puntos. Determinar el valor correcto de $Z$: 0.5 puntos. Calcular el valor de $T$: 0.5 puntos.

# SOLUCIONES

**A.1**

a. $|A| = 2 - 2\alpha$, $|A| = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.
Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$, $rang(A) = rang(A^*) =$ nº de incógnitas y por tanto el sistema es compatible determinado.
Para $\alpha = 1$, $rang(A) = rang(A^*) <$ nº de incógnitas y por tanto el sistema es compatible indeterminado.

b. Para $\alpha = 1$ las soluciones son $y = 0, x + y = 1$
Para $\alpha = -1$ la solución es $x = -1, y = 0, z = 0$

---

**A.2**

a. Como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$$

entonces $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$. Por otro lado $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ y como $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) > 0$ entonces la función crece en todo el dominio.

b. Los límites de la integral son los puntos donde se cortan $f(x)$ y $g(x)$. Se cortan cuando $\frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{/}2$. Los valores de corte se producen en $x = 1$ y $x = 2$. El área comprendida entre las dos curvas es $\left|\int_1^2 \frac{x-1}{x} dx - \int_2^4 \frac{x-1}{2} dx\right| = \left|\left[\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} - \log x\right]_1^2\right| = \frac{3}{4} - \log 2 \approx -0.807$

---

**A.3**

Previamente convertimos la recta $r$ a su ecuación paramétrica que es $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

a. Es muy sencillo ver que tienen el mismo vector director. También se comprueba que no hay ningún $t$ para $s$ que nos permita obtener el punto $P_r = (2, 0, 1)$ de la recta $r$, por tanto las rectas son paralelas.

b. Tenemos los puntos $A = (2, 0, 1)$ de la recta $r$, $B = (2, 0, 2)$ de la recta $s$ y un segundo punto de la $r$ con $\lambda = -1$, $C = (1, -1, 2)$ que permiten definir dos vectores coplanares $v_{AB} = (0, 0, 1)$ y $v_{CB} = (1, 1, 0)$ por tanto el plano que contiene a las dos rectas es: $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$

c. El punto de corte del plano $z = 0$ con $r$ se produce con $\lambda = 1$ y por tanto es $P = (3, 1, 0)$ y para la recta s se produce cuando $t = 2$ y por tanto es $Q = (4, 2, 0)$. La recta que pasa por esos puntos tendrá como vector director $v_{PQ} = (1, 1, 0)$ y por tanto la recta buscada será $q \equiv \begin{cases} x = 3 + \gamma \\ y = 1 + \gamma \\ z = 0 \end{cases}$

---

**A.4**

a. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.85 = 0.15$
$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B|A)} = \frac{0.15}{0.35} = 0.4$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.45 + 0.15 - 0.4 = 0.2$
Aplicando la regla de Bayes $(B|\overline{A}) = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)} = \frac{0.2-0.15}{1-0.6} = 0.125$

b. Son sucesos independientes si $P(A) = P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Como $P(A) = 0.45$ y $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75$ no son sucesos independientes.

# SOLUCIONES

---

**B.1**

a. $|A| = -\lambda(\lambda^2 + \lambda + 4)$.

b. $\lambda = 0$. No tiene más soluciones reales y por tanto es invertible para $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

c. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$

---

**B.2**

Puntos de estudio donde el denominador es 0. $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \{0, 1\}$. Como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = -\infty$$

y como

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} = -\infty$$

a. $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b. Hay dos asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 1$

c. Como

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - x^2}\frac{1}{x} = 1 \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x^3 - x^2} - mx = 4$$

por la derecha y por la izquierda se tiende a la misma asíntota oblícua $g(x) = x + 4$.

---

**B.3**

a. Con un vector perpendicular al vector normal al plano $\pi$, $v_\pi = (1. - 1, 0)$, y al vector $v_{BA} = (1, 1, 0)$ con el mismo módulo que el vector $v_{BA}$ que es $|v_{BA}| = \sqrt{2}$ aplicándolo a A y B dará los puntos C y D. Y aplicando el vector opuesto nos dará otra posible solución. Un vector como el buscado se obtiene de $v_1 = v_\pi \times v_{BA} = (0, 0, 2)$. Como tiene que tener de módulo $\sqrt{2}$ el vector buscado es el $v_2 = (0, 0, \sqrt{2})$, que aplicándolo como se ha indicado nos da una primera solución que es $C = (1, 0, \sqrt{2}), D = (2, 1, \sqrt{2})$ y la otra posible solución es $C = (1, 0, -\sqrt{2}), D = (2, 1, -\sqrt{2})$.

b. Calculamos $v_{EA} = (2, 0, 0)$. Para calcular el volumen basta calcular el módulo del producto mixto, $V = |v_{EA} \cdot v_{BA} \times v_2| = 2sqrt(2)$. El volumen del otro paralalepípedo es idéntico al ser $V = |v_{EA} \cdot v_{BA} \times (-v_2)|$

---

**B.4**

a. Si $X = 180$ Entonces $Z = \frac{180-160}{15} = 20/15 \approx 1.33$. La probabilidad de perder el vuelo es $P = 1 - P(Z) = 1 - P(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$. Es decir, lo perderemos con una probabilidad debajo 9.18%.

b. Si buscamos la probabilidad de que perder el avión sea de 0.01 es lo mismo que el que la probabilidad de no perderlo sea $P = 1 - 0.01 = 0.99$. Esto se produce para $Z = 2.33$. Por tanto $X = \mu + Z\sigma = 160 - 2.33 \cdot 15 = 194.95$. Por tanto el valor de $T$ es 194.95.