UAM Universidad Autónoma de Madrid	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria 2024 **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**R2**

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la matriz inversa A^{-1}.
b) Calcule una matriz X tal que $X \cdot A = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$4x + y \geq 3; \quad y \geq -1; \quad x + y \leq 3.$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Obtenga los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = x^2 e^{1-x}$.
a) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0'6 \quad P(B) = 0'4 \quad \text{y} \quad P(A \mid B) = 0'7$$

Calcule:

a) $P(A \cup B)$.
b) $P(A \mid \overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso en kilogramos (kg) de residuos electrónicos que se generan anualmente por habitante en España se puede aproximar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 3$ kg.

a) En un reciente estudio se ha obtenido, para una muestra de 100 personas, el intervalo de confianza $I[19'349\ ,\ 20'651]$. Calcule la media muestral $\overline{x}$ y el nivel de confianza utilizado.
b) Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 400 para el mismo nivel de confianza.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rl} x - y - z & = 2 \\ ax + y + z & = 0 \\ x - y & = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva, si es posible, el sistema para $a = 0$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea $f(x)$ una función real de variable real tal que su función derivada es

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
b) Calcule los máximos y mínimos locales de $f(x)$ si los hubiese.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x + 4}{2 - x}$$

a) Determine su dominio y sus asíntotas horizontales y verticales, si existen.
b) Calcule su función derivada, $f'(x)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio. Se conoce que:

$$P(A) = 0'5 \quad P(B) = 0'7 \quad \text{y} \quad P(\overline{A \cap B}) = 0'6$$

Calcule:

a) $P(A \cup B)$.
b) $P(B \mid \overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La confección de una camiseta requiere, para la obtención del algodón empleado, de una cantidad de litros (l) de agua que se puede aproximar por una variable aleatoria X, con distribución normal de media $\mu = 2000$ l y desviación típica $\sigma = 500$ l. Se toma una muestra aleatoria simple de 25 camisetas. Calcule

a) La probabilidad de que la media del consumo de agua que ha necesitado su fabricación, $\overline{X}$, sea mayor o igual a 2100 l.
b) La probabilidad de que la media del consumo de agua que han necesitado esas 25 camisetas, $\overline{X}$, esté entre 2100 y 2200 l.

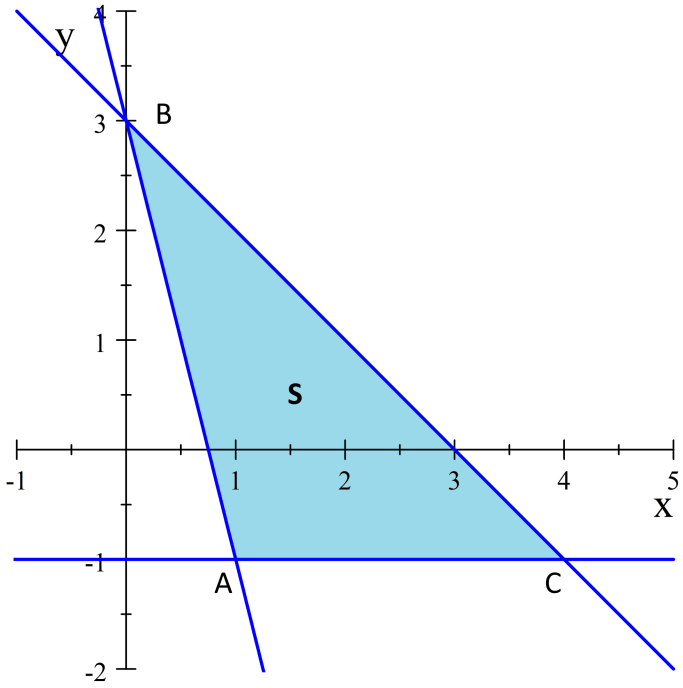
SOLUCIONES OPCIÓN A

1. *a*) Como $|A| = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *a*) Dibujamos la región S y calculamos los vértices:



Con vertices $A = (-1, 1)$, $B = (0, 3)$ y $C = (4, -1)$.

b) La función objetivo es $f(x, y) = x - 2y$. Como la región es cerrada y acotada, evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $f(A) = f(-1, 1) = 3$
- $f(B) = f(0, 3) = -6 \rightarrow$ Mínimo
- $f(C) = f(4, -1) = 6 \rightarrow$ Máximo

Resumiendo, el valor máximo de $f(x, y)$ en S es 6 y se da en el punto $C = (4, -1)$. El valor mínimo de $f(x, y)$ en S es -6 y se da en el punto $B = (0, 3)$.

3. *a*) La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2e^{1-x}$ en $x = 1$ es:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Así pues, como

$$f(1) = 1$$
$$f'(x) = 2xe^{1-x} + x^2e^{1-x}(-1) = xe^{1-x}(2 - x) \Rightarrow f'(1) = 1$$

Tenemos que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ es:

$$y = 1 + (x - 1) = x$$

b) La función $f(x) = x^2e^{1-x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = xe^{1-x}(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2.$$

Como $e^{1-x} > 0$ siempre, tenemos:

- $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$, por lo que $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$.
- $f'(x) > 0$ en $(0, 0)$, por lo que $f(x)$ es creciente en $[0, 2]$.
- $f'(x) < 0$ en $(2, \infty)$, por lo que $f(x)$ es decreciente en $[2, \infty)$.

4. Sabemos que:

$$P(A) = 0'6 \quad P(B) = 0'4 \ \text{ y } \ P(A \mid B) = 0'7$$

a) $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = (0'7)(0'4) = 0'28$
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'4 - 0'28 = 0'72.$

b) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0'6 - 0'28}{1 - 0'4} = \dfrac{16}{30} \approx 0'533.$

5. *a*) El intervalo de confianza está dado por

$$I = [19'349\ ,\ 20'651] = [\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

donde $n = 100$ y $\sigma = 3$ kg. La media muestral es:

$$\overline{x} = \frac{1}{2}(19'349 + 20'651) = 20 \text{ kg}.$$

Como

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}\frac{3}{\sqrt{100}} = z_{\alpha/2}\frac{3}{10} = 0'651 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{6'51}{3} = 2'17$$

Con lo que $\alpha = 2\,(1 - 0'985) = 0'03$ y el nivel de confianza utilizado es del 97 %.

b) El error máximo obtenido si, con los mismos datos, se hubiese utilizado una muestra de $n = 400$ sería:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{3}{\sqrt{400}} = (2'17)\,\frac{3}{20} = 0'3255.$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

1. *a*) La matriz de los coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es $|A| = a + 1$. Por lo tanto:

- Si $a \neq -1$, $rang(A) = 3$, SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO ya que el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de variables.
- Si $a = -1$, $rang(A) = 2$, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

La matriz ampliada es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A^*) = 2$$

Por lo tanto el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO, ya que $rang(A) = rang(A^*) = 2 < 3$.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3 \to f_3 - f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = & 2 \\ y = & 1 \\ z = & -1 \end{cases}$$

2. *a*) La función $f(x)$ tiene derivada continua en $\mathbb{R}$ que es su dominio. Calculamos los puntos donde se anula $f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$:

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(x - 1/3) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1/3$$

Ahora miramos el signo:

- En $(-\infty, -2)$ $f'(x) > 0$ por lo tanto $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 1/3)$ $f'(x) < 0$ por lo que $f(x)$ es decreciente en $(-2, 1/3)$.
- En $(1/3, \infty)$ $f'(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es creciente en $(1/3, \infty)$.

b) La función es derivable en $\mathbb{R}$ por lo que los candidatos a máximo o mínimo de $f(x)$ son aquellos puntos en que la derivada se anula, es decir $x = -2$ y $x = 1/3$.

- En $x = -2$ la función pasa de ser creciente a decreciente por lo que $x = -2$ es un máximo local de la función.
- En $x = 1/3$ la función pasa de ser decreciente a creciente por lo que $x = 1/3$ es un mínimo local de la función.

Alternativamente: Sabemos que los puntos críticos de la función (derivada igual a cero) son $x = -2$ y $x = 1/3$. Calculamos la segunda derivada de f y sustituimos por estos valores.

$$f''(x) = 6x + 5$$

- $f''(-2) = -7 < 0$ por lo que $x = -2$ es un máximo local de $f(x)$.
- $f''(1/3) = 7 > 0$ por lo que $x = 1/3$ es un mínimo local de $f(x)$.

3. *a*)

$$f(x) = \frac{2x+4}{2-x}\ .$$

La función es una división de funciones por lo tanto su dominio es $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}; 2 - x = 0\}$. Así, el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{2\}$.
Calculamos asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

así pues, $x = 2$ es asíntota vertical de $f(x)$.

Calculamos asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+4}{2-x} = -2$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+4}{2-x} = -2$$

así pues, $y = -2$ es asíntota horizontal para $x \to \pm\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{2(2-x) - (2x+4)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{8}{(2-x)^2}$

4. Se conoce que:

$$P(A) = 0'5 \quad P(B) = 0'7 \quad \text{y} \quad P(\overline{A \cap B}) = 0'6$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - (1 - P(\overline{A \cap B}) = 0'5 + 0'7 - 0'4 = 0'8.$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \dfrac{0'7 - 0'4}{1 - 0'5} = \dfrac{3}{5} = 0'6.$

5. *a*) $P[\overline{X} \geq 2100] = 1 - P[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{2100-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}] = 1 - P[Z \leq \frac{2100-2000}{500/5}] = 1 - P[Z \leq 1] = 1 - 0'8413 = 0'1587$

b) $P[2100 \leq \overline{X} \leq 2200] = P[\overline{X} \leq 2200] - P[\overline{X} \leq 2100] = P[Z \leq \frac{2200-2000}{500/5}] - P[Z \leq 1] =$
$= P[Z \leq 2] - P[Z \leq 1] = 0'9772 - 0'8413 = 0'1359$

Aquí $Z \sim N(0, 1)$.