	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2024-2025** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social `Rettiwt` se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo".
Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el *youtuber* `@solo_reviews` ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso. Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de `@solo_reviews`, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.
Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en `Rettiwt`:

> *En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al $2\,\%$ de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata. #PearSupport #P25*

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de `@solo_reviews` hubiese sido superior o igual a 11.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del $99\,\%$ de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de `@solo_reviews`. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

Pregunta 2.1
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ (a+1)x+az=5 \end{cases}$$

2.1.a) (1,25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
2.1.b) (1,25 puntos) Resuelva el sistema para $a=2$.

Pregunta 2.2
Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, \quad y \geq 0, \quad -x+y \leq 8, \quad x+4y \leq 12, \quad x+y \leq 6.$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.
2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(x^2 + a),$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ sea 1.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\[2ex] \dfrac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0{,}4, \quad P(\overline{B}) = 0{,}7,$$
$$P(C) = 0{,}5, \quad P(A \cap B \mid C) = 0{,}2,$$

donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C \mid A \cap B)$.

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del $5\,\%$.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el $90\,\%$ de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el $10\,\%$ de las veces.

4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

1.a) La variable aleatoria Y = “Número de smartphones con sobrecalentamiento en el hilo de `@solo_reviews`” es una $\mathrm{B}(n = 288, p = 0{,}02)$. Se solicita $P(Y \geq 11)$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, se puede aproximar Y a una $\mathrm{N}(\mu = np = 5{,}76,\ \sigma = \sqrt{npq} = 2{,}3759)$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P(Y \geq 11) \approx P\left(Z \geq \frac{11 - \mu - 0{,}5}{\sigma}\right) = P(Z \geq 1{,}9951) \approx 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

1.b) Se tiene que $n = 288$, $\hat{p} = 20/288 = 0{,}0694$, $\alpha = 0{,}01$ y $z_{\alpha/2} \approx 2{,}575$. El intervalo de confianza al $99\,\%$ para la proporción de smartphones defectuosos es

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left(\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0{,}0694 \pm 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}0694 \cdot (1 - 0{,}0694)}{288}}\right)$$
$$= (0{,}0694 \pm 0{,}0386) = (0{,}0308; 0{,}1080)\,.$$

La proporción $2\,\%$ que afirma Pearl en su comunicado no está contenida en el intervalo de confianza al $99\,\%$, por lo que su veracidad es cuestionable teniendo en cuenta que la confianza del intervalo para la proporción desconocida es del $99\,\%$.

EJERCICIO 2

Pregunta 2.1

2.1.a) La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $|A| = -a + 2$. Por lo tanto:

- Si $a \neq 2$, es un Sistema Compatible Determinado (SCD). El sistema tiene una única solución.
- Si $a = 2$, la tercera ecuación es redundante ($\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 2 < 3$). Es un Sistema Compatible Indeterminado (SCI).

2.1.b) Para $a = 2$, el sistema se reduce a

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

La solución es $(x, y, z) = \left(\frac{5-2\lambda}{3}, \frac{1-\lambda}{3}, \lambda\right)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. O bien: $(1 + 2\lambda, \lambda, 1 - 3\lambda)$. O bien: $\left(\lambda, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{5-3\lambda}{2}\right)$.

Pregunta 2.2

2.2.a) La región se proporciona en la Figura 1. Los vértices de la región S son $A(-6, 0)$, $B(-6, 2)$, $C(-4, 4)$, $D(4, 2)$ y $E(6, 0)$.

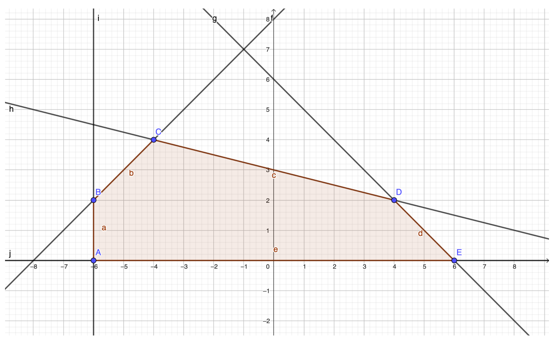


FIGURA 1. Región S.

2.2.b) La función $f(x, y) = 2y - 3x$ toma los siguientes valores en los vértices de S:

Vértice	$A(-6,0)$	$B(-6,2)$	$C(-4,4)$	$D(4,2)$	$E(6,0)$
$f(x,y)$	18	22	20	-8	-18

Por lo tanto $S(x, y)$ alcanza su máximo en el vértice $B(-6, 2)$, con valor $f(-6, 2) = 22$.

EJERCICIO 3

Pregunta 3.1

3.1.a) Las primitivas de $f(x) = x^3 + ax$ son

$$F(x) = \int (x^3 + ax)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + C.$$

Como $F(0) = 0$, entonces $C = 0$. Como $F(1) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} = 1$, entonces $a = \frac{3}{2}$ y $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}$.

3.1.b) Obsérvese que $f(x)$ es positiva siempre que $x \geq 0$. Por la regla de Barrow, el área encerrada entre $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$ es

$$\int_0^2 f(x)\, dx = F(2) - F(0) = \frac{16}{4} + \frac{3 \cdot 4}{4} = 7\ u^2.$$

3.1.c) La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ es $f'(1)$. Se tiene que $f'(x) = 3x^2 + a$. Para que $f'(1) = 1$ se debe cumplir que

$$3 + a = 1 \iff a = -2.$$

Pregunta 3.2

3.2.a) Como $2x - 1 = 0 \iff x = 1/2$, $f(x)$ siempre está definida para $x < 0$. Para $x \geq 0$, $x^2 - 9 = 0 \iff x = 3$ (porque $x \geq 0$). Por lo tanto, $\mathrm{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$.

3.2.b) La función $f(x)$ es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2x - 1} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

3.2.c) Se tiene que

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = +\infty.$$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$. Es la única asíntota vertical porque $2x - 1 = 0$ para $x = \frac{1}{2}$.

Cuando $x \to -\infty$, la asíntota horizontal es $y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$. No hay asíntota oblicua en este caso.

Cuando $x \to +\infty$, el grado del numerador en $f(x)$ es una unidad superior al del denominador, por lo que no hay asíntota horizontal y sí existe asíntota oblicua $y = mx + n$. Se tiene que

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^3 - 9x} = 4$$

y

$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} - 4x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 36x}{x^2 - 9} = 1,$$

por lo que la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ es $y = 4x + 1$.

EJERCICIO 4

Pregunta 4.1

4.1.a)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A)P(B) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}88.$$

4.1.b)

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28.$$

4.1.c)

$$P(C \mid A \cap B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B \mid C)P(C)}{P(A)P(B)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}4 \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}1}{0{,}12} = 0{,}8333\ldots$$

Pregunta 4.2

Si IR = "Insuficiencia Renal" y "$+$" y "$-$" denotan los resultados de la prueba, se sabe que $P(\mathrm{IR}) = 0{,}05$, $P(+|\mathrm{IR}) = 0{,}90$ y $P(+|\overline{\mathrm{IR}}) = 0{,}10$.

4.2.a)

$$P(-) = P(-|\mathrm{IR})P(\mathrm{IR}) + P(-|\overline{\mathrm{IR}})P(\overline{\mathrm{IR}}) = (1 - 0{,}90) \cdot 0{,}05 + (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}95 = 0{,}86.$$

4.2.b)

$$P(\mathrm{IR}|+) = \frac{P(+|\mathrm{IR})P(\mathrm{IR})}{P(+)} = \frac{P(+|\mathrm{IR})P(\mathrm{IR})}{1 - P(-)} = \frac{0{,}90 \cdot 0{,}05}{0{,}14} = \frac{0{,}045}{0{,}14} \approx 0{,}3214.$$

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Apartado (1.a): 1,25 puntos.

Aproximación correcta y justificada a la distribución normal .... 0,75 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida .... 0,50 puntos.

Apartado (1.b): 1,25 puntos.

Determinar el valor $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Aplicación de la fórmula del error y obtención del mismo .... 0,50 puntos.
Determinación correcta del intervalo de confianza .... 0,25 puntos.
Justificación correcta sobre la veracidad del comunicado… .... 0,25 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 2.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (2.1.a): 1,25 puntos.

Cálculo correcto del valor de a .... 0,50 puntos.
Discusión correcta del sistema .... 0,75 puntos.

Apartado (2.1.b): 1,25 puntos.

Obtención de la solución correcta .... 1,25 puntos.

Pregunta 2.2 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (2.2.a): 2 puntos.

Representación de la región .... 0,75 puntos
Cálculo de las coordenadas de los vértices. .... 1,25 puntos.

Apartado (2.2.b): 0,5 puntos.

Cálculo del valor de la función en los vértices................................. 0,25 puntos.
Obtención del valor máximo y el punto en el que se alcanza........... 0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 3.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (3.1.a): 1 punto.

Cálculo correcto de la integral .... 0,50 puntos.
Obtención del valor del parámetro a .... 0,25 puntos.
Expresión correcta de la primitiva pedida .... 0,25 puntos.

Apartado (3.1.b): 0,5 puntos.

Justificación de que no hay puntos de corte entre $x = 0$ y $x = 2$ ... 0,25 puntos.
Cálculo correcto del área pedida .... 0,25 puntos.

Apartado (3.1.c): 1 punto.

Expresión de la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la derivada .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto del valor del parámetro a .... 0,25 puntos.

Pregunta 3.2 Puntuación máxima: 2,5 puntos

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Apartado (3.2.a): 0,5 puntos.

Cálculo correcto del dominio .... 0,50 puntos.

Apartado (3.2.b): 0,5 puntos.

Estudio correcto de la continuidad en $x = 0$ .... 0,50 puntos.

Apartado (3.2.c): 1,5 puntos.

Estudio correcto de la asíntota vertical... 0,50 puntos.

Estudio correcto de la asíntota horizontal .... 0,50 puntos.

Estudio correcto de la asíntota oblicua.. 0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 4.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (4.1.a): 0,75 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,25 puntos.

Apartado (4.1.b): 0,75 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,25 puntos.

Apartado (4.1.c): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Pregunta 4.2 (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Apartado (4.2.a): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (4.2.b): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

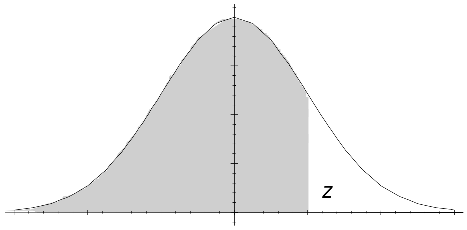
La NO definición de los sucesos se penalizará con 0,25 puntos en la puntuación total de la pregunta.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990