

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llegan puntuales a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llegan tarde a primera hora.

- a) (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
- b) (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

Pregunta 2. (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY e OX , respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.

Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

Pregunta 3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.
 - b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

- a) (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .
- b) (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

Pregunta 4.2. Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

- a) (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.
- b) (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - a) \sin(3x) dx = \frac{2\pi}{9}.$$

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.

a) Obtención de las dos probabilidades condicionadas a partir de los porcentajes dados: 0.1 puntos cada una. Utilización del teorema de la probabilidad total: 0.2 puntos. $P(\overline{L} \cap \overline{P})$: 0.2 puntos. $P(L \cap \overline{P})$: 0.2 puntos. Probabilidad correcta: 0.1 puntos. Porcentaje correcto: 0.1 puntos.

b) Identificación del suceso: 0.2 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.4 puntos. Resolución: 0.4 puntos. (Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

2.

Cálculo del área blanca: 0.6 puntos (planteamiento correcto de la integral: 0.3 puntos, resolución: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos). Cálculo de las áreas roja y verde: 1.3 puntos (identificación del vértice en la curva: 0.2 puntos, expresión de la función área con una sola variable: 0.3 puntos, derivada: 0.2 puntos, punto crítico: 0.2 puntos, obtención del área verde: 0.2 puntos, obtención del área roja: 0.2 puntos). Justificación de que el extremo hallado es un máximo o mínimo: 0.1 puntos.

3.

a) Expresión correcta para hallar X : 0.2 puntos. Cálculo de la matriz inversa de $A + I$: 0.5 puntos. Respuesta correcta: 0.3 puntos.

b1) Propiedad del determinante de un escalar por una matriz: 0.4 puntos (0.2 puntos por enunciarla correctamente, 0.2 puntos por aplicarla correctamente). Propiedad del determinante de la potencia de una matriz: 0.3 puntos (0.2 puntos por enunciarla correctamente, 0.1 puntos por aplicarla correctamente). Respuesta correcta: 0.3 puntos.

b2) Justificación: 0.5 puntos por cada matriz.

4.1.

a) Obtención de los vectores directores de r_1 y r_2 : 0.2 puntos. Independencia lineal de los mismos: 0.2 puntos. Determinación de un vector a partir de un punto de cada recta: 0.2 puntos. Estudio del rango de la matriz formada por los tres vectores: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

b) Punto de corte de r_1 y r_2 : 0.2 puntos. Determinación del vector director de r_3 : 0.4 puntos. Condición de $\sqrt{2}$: 0.2 puntos. Respuesta correcta (una recta): 0.2 puntos.

4.2.

a) Argumentar que la longitud del lado es la distancia del punto al plano: 0.4 puntos. Cálculo de la distancia: 0.4 puntos. Cálculo del volumen: 0.2 puntos.

b) Planteamiento geométrico para obtener un vértice: 0.5 puntos. Cálculo del vértice: 0.5 puntos (planteamiento: 0.3 puntos, resolución: 0.2 puntos).

5.1.

Estudio del dominio de definición: 0.4 puntos. Cálculo de la derivada: 0.4 puntos. Obtención del punto crítico que anula la derivada: 0.4 puntos. Utilización de $x = 1$ para determinar los intervalos: 0.1 puntos. Determinación correcta de los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.3 puntos (0.1 puntos cada intervalo). Identificación del mínimo relativo: 0.4 puntos (justificación: 0.2 puntos, abscisa: 0.1 puntos, ordenada: 0.1 puntos).

5.2.

Uso de integración por partes: 0.5 puntos. Cálculo correcto de la primitiva: 0.8 puntos. Regla de Barrow: 0.4 puntos. Ecuación para a : 0.2 puntos. Cálculo del valor de a : 0.1 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.

$L \equiv$ “Vivir en la misma localidad que el centro.” $P \equiv$ “Llegar puntual a clase a primera hora.”

a) Del enunciado se sabe que $P(L) = 0.85$, $P(\bar{L}) = 0.15$, $P(P|\bar{L}) = 0.75$ y $P(\bar{P}|L) = 0.05$. Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\bar{P}) = P(L \cap \bar{P}) + P(\bar{L} \cap \bar{P}) = 0.85 \cdot 0.05 + 0.15 \cdot 0.25 = 0.08.$$

El 8 % del alumnado llega tarde a clase a primera hora.

b) $P(\bar{L} | P) = \frac{P(\bar{L} \cap P)}{P(P)} = \frac{0.15 \cdot 0.75}{0.92} \approx 0.1223.$

2.

El área blanca es igual al área del rectángulo menos el área por debajo de la curva, es decir,
 $16 - \int_0^8 (2 - x^{1/3}) dx = \int_0^8 x^{1/3} dx = 12$. Por otro lado, para la parte por debajo de la curva, si tomamos como vértice superior derecho del rectángulo que será verde $(x, 2 - x^{1/3})$, su área será igual a $A(x) = 2x - x^{4/3}$. Como $A'(x) = 2 - \frac{4}{3}x^{1/3}$, la función tiene un máximo en $[0, 8]$ para $x = \frac{27}{8}$ puesto que $A'(x) > 0$ en $[0, 27/8]$ y $A'(x) < 0$ en $(27/8, 8]$. De este modo, el área máxima de color verde es igual a $\frac{27}{16}$ y, en consecuencia, el área mínima de color rojo es $\frac{37}{16}$.

3.

a) La matriz X tiene tamaño 3×2 y viene dada por $X = (A + I)^{-1}B$. La matriz inversa existe porque el determinante de $A + I$ es no nulo ($|A + I| = 8$). Como $(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, la matriz

pedida es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

b1) Por las propiedades de los determinantes, se sabe que $|2C| = 2^3|C|$ y $|C^n| = |C|^n$. Como $|C| = 1$, $|(2C)^{100}| = (|2C|)^{100} = (2^3|C|)^{100} = 2^{300}|C|^{100} = 2^{300} = 8^{100}$.

b2) Como el determinante de la matriz A es no nulo ($|A| = 1$), es una matriz invertible. La matriz AB tiene tamaño 3×2 . Al no ser cuadrada no puede ser invertible.

4.1.

a) Los vectores directores de r_1 y r_2 son $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$, respectivamente. La matriz $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \overrightarrow{P_1P_2} \end{pmatrix}$ tiene rango 2 porque los vectores no son proporcionales. Sean $P_1(1, 1, 0)$ y $P_2(1, 0, 0)$ puntos de las rectas r_1 y r_2 , respectivamente, la matriz

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \overrightarrow{P_1P_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 puesto que su determinante es cero. Por lo tanto, las dos rectas se cortan en un punto.

b) Se halla el punto de corte de las rectas r_1 y r_2 , igualando los puntos de r_1 y r_2 , $(1+t, 1, 0) = (1+s, s, 0)$. Por lo tanto $t = s = 1$ y el punto de corte de las dos rectas es $Q(2, 1, 0)$. Se hallan ahora los puntos de r_2 que estén a distancia $\sqrt{2}$ de $Q(2, 1, 0)$: $\sqrt{(1+s-2)^2 + (s-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = 2(s-1)^2 \Rightarrow s = 0$ o $s = 2$. Los puntos son $P_1(1, 0, 0)$ o $P_2(3, 2, 0)$. La recta r_3 está contenida en el plano $z = 0$, al igual que las dos rectas dadas. Luego, el vector director de r_3 es de la forma $\vec{v} = (a, b, 0)$ y además tiene que ser perpendicular al vector director de r_1 . Esto implica que $(a, b, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow a = 0$, entonces $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Las posibles rectas solución son, $r_3 \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0)$ o $r_3 \equiv (x, y, z) = (3, 2, 0) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.

a) La longitud del lado es la distancia del punto al plano: $\ell = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$. El volumen es $\ell^3 = \frac{8}{27}$.

b) El punto que es proyección ortogonal de P sobre el plano es un vértice del cubo porque el segmento que surge es perpendicular a la base del cuadrado. Ese punto surge de intersectar la recta $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = 1 + t$ con el plano, que da $t = 2/9$. Luego, otro vértice del cuadrado es $(13/9, 14/9, 11/9)$.

5.1.

El dominio de definición de la función es: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. La derivada de la función en su dominio es $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$, que se anula en $x = e$. La función es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, e)$ y creciente en $(e, +\infty)$. El mínimo relativo se alcanza en $x = e$ y el valor de la función es $f(e) = e$.

5.2.

Integrando por partes se obtiene:

$$\int x \sin(3x) dx = -\frac{1}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = -\frac{1}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) + C.$$

Utilizando la primitiva hallada, integrando y aplicando Barrow se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \sin(3x) dx &= \left[-\frac{1}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - a \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) + \frac{1}{3}a \cos(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - a \right) - \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Igualando al valor dado $\frac{2\pi}{9}$ se obtiene que $a = -\frac{\pi}{6}$.