PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección
5 de junio de 2004

Nombre:……………………………………………………...................................
Apellidos:…………………………………………………...................................
Fecha de nacimiento:……………………………………...................................
Teléfonos:…………………………………………………..................................

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

En primer lugar debes hojear todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos.

No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

Queremos conocer no solamente tus soluciones, sino sobre todo tus propios caminos hacia la solución.

Para ello te hemos propuesto los problemas cada uno en una hoja. El espacio libre lo puedes utilizar para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta espacio utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). De ningún modo debes utilizar una hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.

Al final nos debes entregar todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Estas ideas deberías tratar de describírnoslas de la manera más clara posible. Para ello frecuentemente nos bastará un par de indicaciones breves. También las soluciones parciales a las tareas propuestas nos interesan.

Tienes dos horas en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: máximo tiempo para un ejercicio 30 minutos.

.

Te deseamos mucho éxito.

Problema 1

Se tienen fichas en forma de pentágono regular. Cada pentágono tiene una cara roja y en ella sus vértices están numerados del 1 al 5, consecutivamente y en el sentido horario. La otra cara es blanca.

Se busca construir una torre usando estas fichas con la cara roja hacia arriba, de modo que sean iguales las sumas de los números que quedan en cada una de las aristas verticales de la torre. Contesta a las siguientes preguntas razonando tus respuestas.

(a) ¿Será posible construir una torre con 2 fichas?

(b) ¿Será posible construir una torre con 4 fichas?

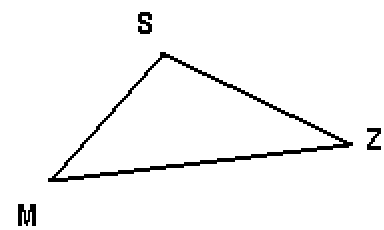
(Sigue a la vuelta)

(c) ¿Será posible construir una torre con 5 fichas?

(d) ¿Será posible construir una torre con 20 fichas?

Problema 2

Una compañía de ordenadores tiene 4 tiendas, dos en la ciudad **M**, una en la ciudad **S** y otra en **Z**. Los encargados de las tiendas desean reunirse en una de las tres ciudades para tomar decisiones acerca de su política de ventas. Quieren elegir un lugar para que el coste de desplazamiento entre las tres ciudades sea el menor posible.



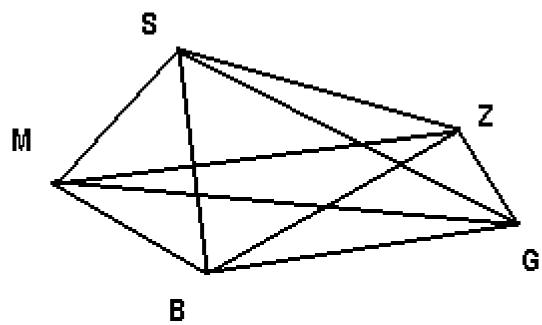
(En este ejercicio no necesitas las distancias entre las ciudades)

a) ¿En cuál de las tres ciudades deberían reunirse? Razona tu respuesta.

b) ¿Sería mejor reunirse en algún punto del interior del triángulo que forman las tres ciudades? Razona tu respuesta.

(Sigue a la vuelta)

c) La compañía ha crecido y ahora tiene 20 tiendas: 6 de ellas en **M**, 1 en **S**, 2 en **Z**, 10 en otra ciudad **B** y 1 en otro lugar **G**. Hay carreteras directas entre todas las ciudades. ¿En cuál de estas ciudades deberían reunirse los encargados de cada tienda para que el coste de desplazamiento entre ciudades sea el menor posible? Razona tu respuesta.



Problema 3

El "AOés" es una lengua en la que sólo hay dos letras, la "A" y la "O". La única regla del AOés es que en una palabra de esta lengua nunca pueden aparecer dos Oes seguidas. Por ejemplo, OAAAAO es una palabra permitida, pero AOO es prohibida.

a) ¿Cuántas palabras de cuatro letras hay en AOés? ¿Cuántas de cinco letras?

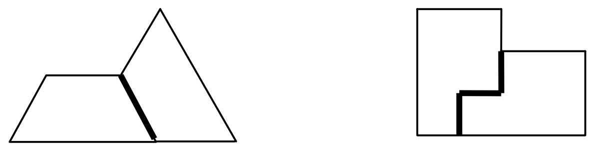
b) ¿Cuantas palabras de 10 letras hay en AOés?

(Sigue a la vuelta)

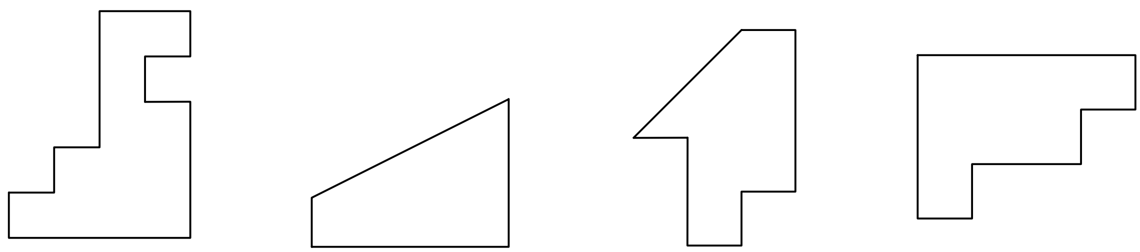
c) ¿Apostarías a un juego en el que se tira una moneda ocho veces, y si no salen dos caras seguidas en las ocho tiradas ganas un euro, pero si hay alguna serie de dos caras seguidas, pierdes 1 euro?

d) La Liga Progresista de AOlandia cree que la prohibición de dos Oes seguidas es una regla demasiado estricta, y propone ampliar el AOés a todas las palabras (con sólo Aes y Oes) en las que no existan tres Oes seguidas. ¿Cuántas palabras de diez letras hay en esta nueva versión del AOés?

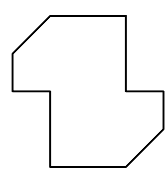
Problema 4.
Observa estas figuras: las líneas más gruesas las dividen en **dos** partes "iguales".



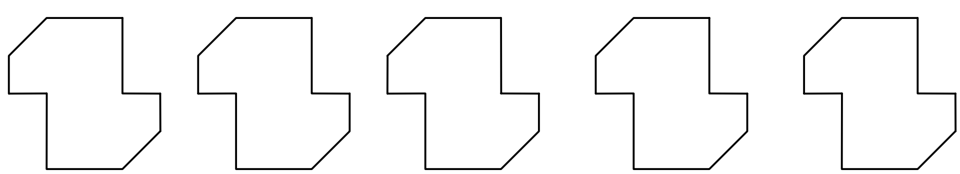
(a) Haz lo mismo con las siguientes figuras:



(b) Divide la siguiente figura en **dos** partes "iguales".



Observa que puedes hacerlo de varias maneras. Dibuja otras **cinco** descomposiciones.

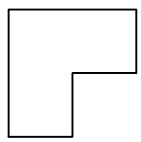


¿Cuántas más crees que hay?

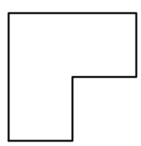
(Sigue a la vuelta)

(c) Dibuja una figura que pueda dividirse en **dos** partes "iguales" de infinitas maneras distintas.

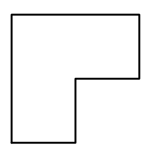
(d) Divide ahora la siguiente figura en **tres** partes "iguales":



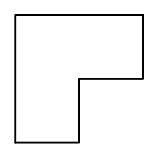
Divide esta misma figura en **seis** partes "iguales".
¿De cuántas formas distintas puedes hacerlo?



¿Sabrías dividirla en **cuatro** partes "iguales"?



¿Y en 16?



Problema 5

Decimos que un número es **divertido** cuando la suma de sus cifras es divisible entre 7. Por ejemplo, 7, 43 y 1006 son números divertidos. Observa que el par de números divertidos más pequeños es el formado por 7 y 16, cuya diferencia es 9.

a) Encuentra 8 números consecutivos donde haya exactamente dos que sean divertidos.

b) Encuentra 12 números consecutivos, ninguno de los cuales sea divertido.

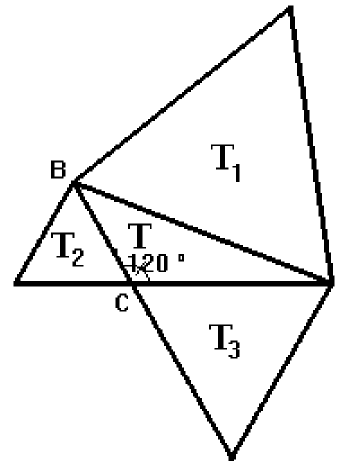
c) Da un argumento que justifique que entre 13 números consecutivos hay siempre por lo menos uno que es divertido.

(Sigue a la vuelta)

d) Encuentra dos números divertidos que además sean consecutivos.

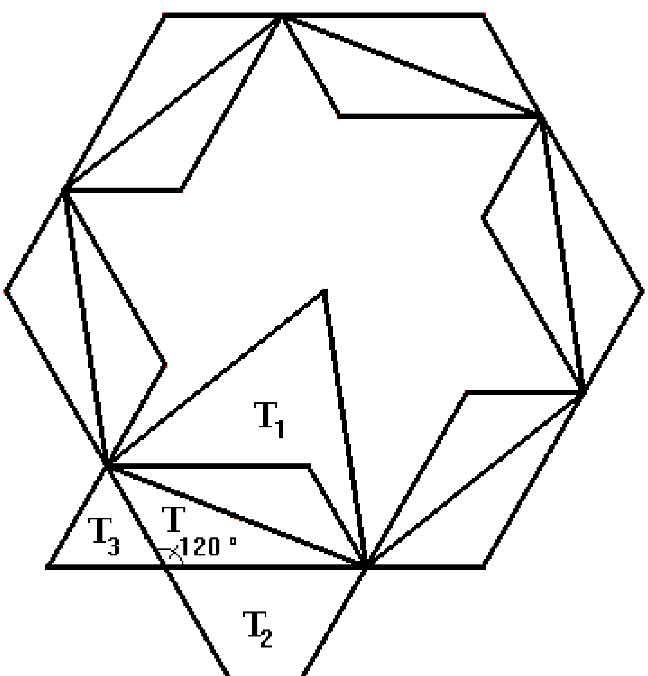
e) Un estudiante de primero de ESO le dice a su hermano mayor: “Mira, acabo de encontrar el par de números divertidos, con diferencia 9, más grandes que se pueden encontrar”. El hermano, sin mirar siquiera el par de números que ha encontrado el pequeño, le dice: “Estás confundido”. Explica por qué tiene razón el hermano mayor.

Problema 6



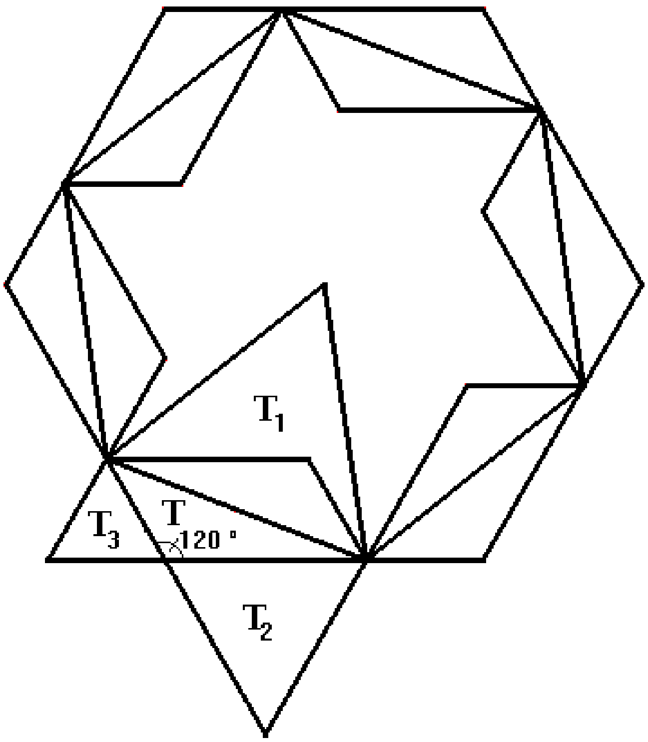
Tenemos un triángulo T en el que uno de sus ángulos mide 120º. Trazamos sobre sus lados triángulos equiláteros exteriores T_1, T_2 y T_3 . Queremos demostrar que el área del triángulo equilátero mayor T_1 es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos equiláteros, T_2 y T_3 , más el área del triángulo inicial T.

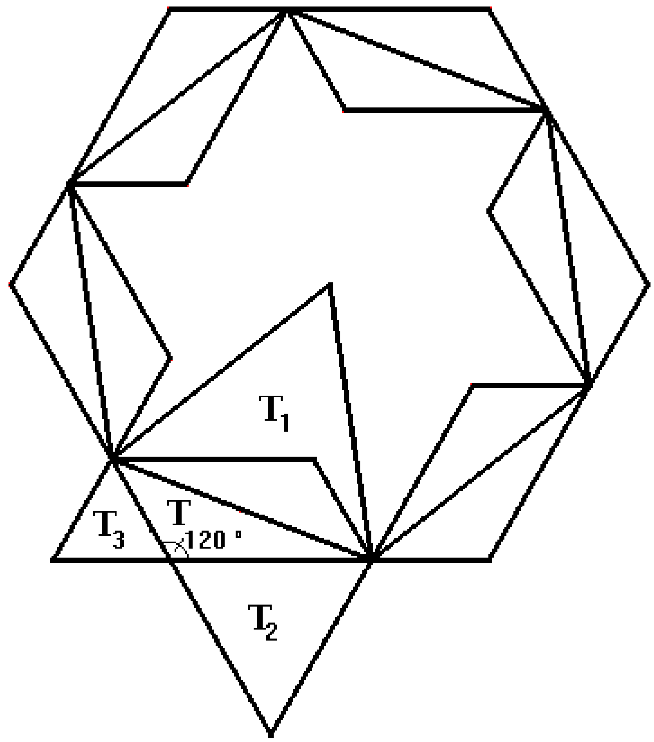
Para ello vamos a usar que, debido a ese ángulo de 120º, podemos formar, girando adecuadamente el triángulo T, la figura siguiente:

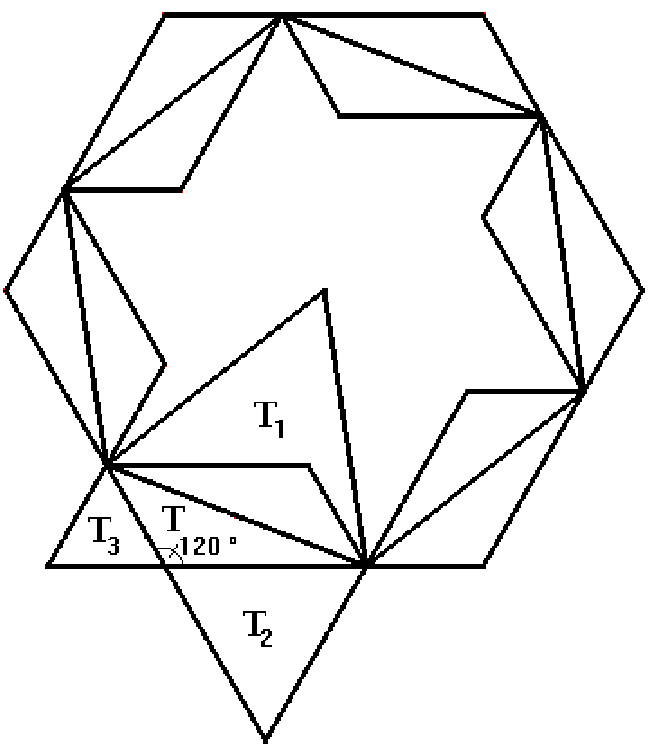


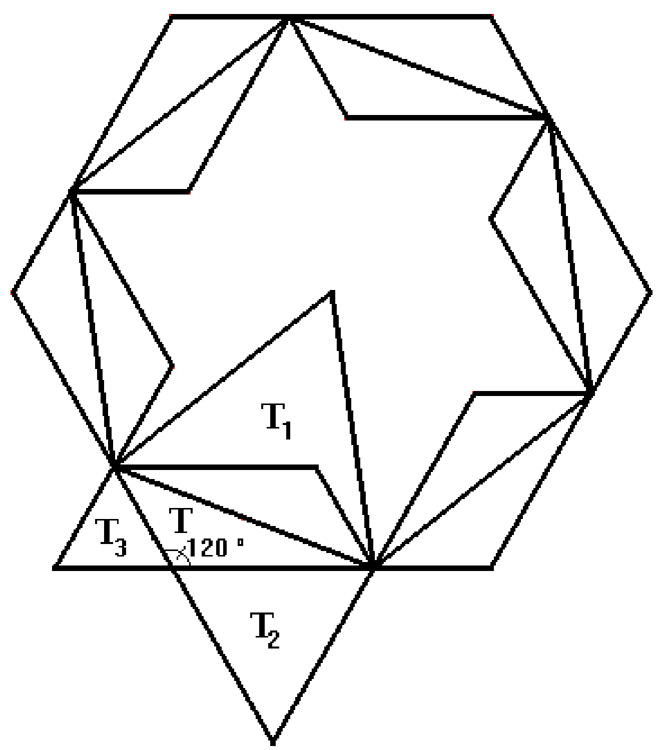
Traza en esta nueva figura algunas líneas auxiliares más y demuestra que el área del triángulo equilátero $\mathbf{T_1}$ coincide con la suma de las áreas de **T,** $\mathbf{T_2}$ y $\mathbf{T_3}$.

Si te equivocas tienes otros cuatro dibujos más a la vuelta para practicar.


T_1
T_3
T
120 °
T_2


T_1
T_3
T
120 °
T_2


T_1
T_3
T
120 °
T_2


T_1
T_3
T
120 °
T_2