





Asignatura: Curso avanzado de geometría  
 Código: 32929  
 Centro: Ciencias  
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
 Nivel: Máster M2  
 Tipo: Optativa  
 N° de créditos: 6

#### 1.10. Datos del equipo docente / [Faculty data](#)

Docente(s) / [Lecturer](#) Miguel Domínguez Vázquez  
 Departamento de Matemáticas/ [Department of Mathematics](#)  
 Facultad / [School](#) Facultad de Ciencias / [School of Sciences](#)  
 Despacho - Módulo/ [Office – Module](#) Despacho 304, Modulo 17 / [Room 304, module 17.](#)  
 Teléfono / [Phone](#): +34 91 497 3478  
 Correo electrónico/[Email](#): miguel.dominguezv@uam.es  
 Página web/[Website](#): <http://verso.mat.uam.es/~miguel.dominguezv/>  
 Horario de atención al alumnado / [Office hours](#): Cita previa / [By appointment.](#)

#### 1.11. Objetivos del curso / [Course objectives](#)

Este curso gira en torno a la noción de simetría en geometría diferencial, formalizada mediante el concepto de grupo de Lie, así como a su interacción con la teoría de subvariedades en geometría de Riemann, la cual generaliza la teoría clásica de curvas y superficies en el espacio euclídeo.

El objetivo del curso es, por un lado, alcanzar una comprensión más profunda de la teoría de grupos y álgebras de Lie, con énfasis en múltiples ejemplos y distintos resultados de estructura, y, por otro lado, dominar algunas de las principales nociones y técnicas de la geometría Riemanniana de subvariedades y acciones isométricas de grupos de Lie, sabiendo analizarlas y aplicarlas en distintos ejemplos importantes.

[This course revolves around the notion of symmetry in differential geometry, formalized by means of the concept of Lie group, as well as its interaction with the theory of submanifolds in Riemannian geometry, which generalizes the classical theory of curves and surfaces in the Euclidean space.](#)

[The first objective of this course will be to reach a deeper understanding of the theory of Lie groups and Lie algebras, with emphasis on various examples and different structure results. The second objective will be to master some of the main notions and techniques of Riemannian submanifold geometry and Lie group isometric actions, being able to analyze and apply them to several important examples.](#)

#### 1.12. Contenidos del programa / [Course contents](#)

Capítulo 1. Estructura de grupos y álgebras de Lie.

1. Resumen de conceptos previos: grupo de Lie, álgebra de Lie, ejemplos clásicos, aplicación exponencial, representación adjunta.
2. Subgrupos de Lie, homomorfismos y teorema de Cartan.
3. Recubrimientos de grupos de Lie.
4. Representaciones de grupos y álgebras de Lie.
5. Álgebras de Lie resolubles, nilpotentes y semisimples.
6. Teoremas de Lie y Engel.
7. Forma de Killing y criterios de Cartan.
8. Grupos y álgebras de Lie compactos.
9. Álgebras de Lie complejas semisimples: subálgebras de Cartan, raíces, diagramas de Dynkin, grupo de Weyl, clasificación y aplicación al estudio de álgebras de Lie compactas.
10. Enunciado y comentarios sobre la descomposición de Levi, el tercer teorema de Lie, el teorema de Ado y la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff.



Asignatura: Curso avanzado de geometría  
Código: 32929  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 6

## Capítulo 2. Geometría Riemanniana de subvariedades y acciones isométricas.

1. Resumen de conceptos previos de geometría de Riemann: variedad Riemanniana, grupo de isometrías, conexión de Levi-Civita, tensor de curvatura, aplicación exponencial, espacios modelo de curvatura constante.
2. Inmersiones isométricas, subvariedades inmersas, embebidas y cerradas.
3. Segunda forma fundamental, operador de configuración, curvaturas principales, curvatura media, conexión normal.
4. Ecuaciones fundamentales de la geometría de subvariedades.
5. Enunciado y comentarios sobre el teorema fundamental de la geometría de subvariedades.
6. Tipos importantes de subvariedades: totalmente geodésicas, totalmente umbílicas, minimales, con curvatura media constante.
7. Acciones de grupos de Lie por isometrías.
8. Acciones propias, existencia de slices, tipos de órbitas.
9. Hipersuperficies homogéneas, con curvaturas principales constantes e isoparamétricas.
10. Aplicación de los campos de Jacobi al estudio de hipersuperficies equidistantes y subvariedades focales.
11. Hipersuperficies isoparamétricas en los espacios de curvatura constante: fórmula de Cartan, clasificación en los espacios euclídeos e hiperbólicos, ejemplos en las esferas.

## Chapter 1. Structure of Lie groups and Lie algebras.

1. Review of previous concepts: Lie group, Lie algebra, classical examples, exponential map, adjoint representation.
2. Lie subgroups, homomorphisms and Cartan's theorem.
3. Lie group coverings.
4. Representations of Lie groups and algebras.
5. Solvable, nilpotent and semisimple Lie algebras.
6. Lie's and Engel's theorems.
7. Killing form and Cartan criteria.
8. Compact Lie groups and algebras.
9. Complex semisimple Lie algebras: Cartan subalgebras, roots, Dynkin diagrams, Weyl group, classification and application to the study of compact Lie algebras.
10. Statement and comments on the Levi decomposition, Lie's third theorem, Ado's theorem and Campbell-Baker-Hausdorff formula.

## Chapter 2. Riemannian submanifold geometry and isometric actions.

1. Review of previous concepts on Riemannian geometry: Riemannian manifold, isometry group, Levi-Civita connection, curvature tensor, exponential map, space forms.
2. Isometric immersions, immersed, embedded and closed submanifolds.
3. Second fundamental form, shape operator, principal curvatures, mean curvature, normal connection.
4. Fundamental equations of submanifold geometry.
5. Statement and comments about the fundamental theorem of submanifold geometry.
6. Important types of submanifolds: totally geodesic, totally umbilical, minimal, with constant mean curvature.
7. Lie group isometric actions.
8. Proper actions, existence of slices, orbit types.



Asignatura: Curso avanzado de geometría  
 Código: 32929  
 Centro: Ciencias  
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
 Nivel: Máster M2  
 Tipo: Optativa  
 N° de créditos: 6

9. [Homogeneous hypersurfaces, isoparametric hypersurfaces, hypersurfaces with constant principal curvatures.](#)
10. [Application of Jacobi fields to the study of equidistant hypersurfaces and focal submanifolds.](#)
11. [Isoparametric hypersurfaces in space forms: Cartan's formula, classification in the Euclidean and hyperbolic spaces, examples in spheres.](#)

### 1.13. Referencias de consulta / [Course bibliography](#)

1. ALEXANDRINO, M. M., BETTIOL, R.: *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*, Springer, Cham, 2015.
2. BERNDT, J., CONSOLE, S., OLMOS, C.: *Submanifolds and holonomy*, Second edition, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
3. KNAPP, A. W.: *Lie groups beyond an introduction* (2<sup>nd</sup> edition), Birkhäuser, 2002.
4. HELGASON, S.: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces* (corrected reprint of the 1978 original), American Mathematical Society, 2001.
5. O'NEILL, B.: *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, 103, Academic Press, Inc., New York, 1983.
6. WARNER, F. W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1983.
7. ZILLER, W.: *Lie groups, representation theory and symmetric spaces* (preliminar pdf version), 2010.

## 2. Métodos docentes / [Teaching methodology](#)

Clases presenciales, resolución de problemas y lecturas dirigidas.  
[Lectures, problem work sessions and reading assignments.](#)

## 3. Tiempo de trabajo del estudiante / [Student workload](#)

		Nº de horas	
Presencial	Clases teóricas	42 h (28%)	50 h (33%)
	Tutorías	6 h (4%)	
	Presentación de los trabajos finales	2 h (1%)	
No presencial	Elaboración de problemas	30 h (20%)	100 h (67%)
	Estudio semanal	63 h (42%)	
	Preparación del trabajo final	7 h (5%)	
Carga total de horas de trabajo: 25 horas x 6 ECTS		150 h	



Asignatura: Curso avanzado de geometría  
 Código: 32929  
 Centro: Ciencias  
 Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
 Nivel: Máster M2  
 Tipo: Optativa  
 N° de créditos: 6

#### 4. Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / Evaluation procedures and weight of components in the final grade

##### Convocatoria ordinaria / Ordinary evaluation:

1. Entrega de ejercicios: 50%.
2. Trabajo+exposición y/o examen final: 40%.
3. Participación y actitud: 10%.

1. Home assignments: 50%.
2. Final work+presentation and/or final exam: 40%.
3. Participation and attitude: 10%.

##### Convocatoria extraordinaria / Extraordinary evaluation:

Examen final: 100%

Final exam: 100%

#### 5. Cronograma\* / Course calendar

Semana Week	Contenido Contents	Horas presenciales Contact hours	Horas no presenciales Independent study time
1--7	Chapter 1	22	50
8--14	Chapter 2	22	50

\*Este cronograma tiene carácter orientativo.